

ВОПРОСЫ К КОЛЛОКВИУМУ

Пределы и непрерывность функций

ПМ, курс 1, модуль 2

На коллоквиуме студент получает два вопроса из данного списка. Каждый вопрос оценивается из 5 баллов. Нужно знать определения и уметь формулировать утверждения. Доказательство теорем не требуется.

1. Дайте определения ограниченной (сверху, снизу) функции $y = f(x)$, монотонной функции. Что такое верхняя и нижняя грань функции (два равносильных определения). Приведите примеры.
2. Расскажите о сложной функции и об обратной функции. Приведите примеры.
3. Дайте определение последовательности. Расскажите о свойствах ограниченности и монотонности последовательностей. Приведите примеры.
4. Дайте определение пределов $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty, -\infty, \infty$. Приведите примеры. Расскажите о единственности предела и о критерии Коши сходимости последовательности.
5. Как связаны ограниченность и сходимость последовательности? Приведите примеры. Сформулируйте теоремы Вейерштрасса о пределе последовательности и об изменении конечного числа членов последовательности.
6. Определите бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, расскажите об их свойствах. Сформулируйте теорему об арифметических свойствах конечного предела последовательностей.
7. Сформулируйте теоремы о предельном переходе в неравенствах и "о двух милиционерах" для последовательностей. Дайте определение числа e .
8. Определите окрестности $O(\omega)$ и проколотые окрестности $\dot{O}(\omega)$ для символа $\omega = x_0, +\infty, -\infty, \infty$. Дайте общее определение предела $\lim_{x \rightarrow \omega} f(x) = \omega_1$ на языке окрестностей (по Коши). Приведите поясняющие графики для случаев $\omega = \{x_0, +\infty\}$, $\omega_1 = \{a, -\infty\}$.
9. Дайте определение $\lim_{x \rightarrow \omega} f(x) = \omega_1$ на языке неравенств для случаев $\omega = \{x_0, -\infty\}$, $\omega_1 = \{a, +\infty\}$. Приведите (аналитически) примеры соответствующих функций.
10. Определите односторонние пределы функции в точке. Расскажите о связи предела и односторонних пределов функции. Приведите примеры. Как связаны понятия конечного предела функции в точке по Коши и по Гейне? Покажите, что $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ не существует.

11. Определите бесконечно малые и бесконечно большие функции при $x \rightarrow \omega$. Поясните связь между ними и перечислите их основные свойства. Приведите примеры.
12. Расскажите о финальной ограниченности функций. Как это понятие связано с существованием конечного предела? Приведите примеры. Сформулируйте теорему об арифметических свойствах конечных пределов функций.
13. Сформулируйте теоремы о предельном переходе в неравенствах и "о двух милиционерах" для функций.
14. Дайте определение соотношения $f(x) = o(g(x))$, $x \rightarrow \omega$. Приведите примеры. Дайте определение соотношения $f(x) = O(g(x))$, $x \rightarrow \omega$. Приведите примеры.
15. Дайте различные (эквивалентные) определения эквивалентности функций при $x \rightarrow \omega$ ($\omega = x_0, \pm\infty, \infty$). Сформулируйте теорему о замене функций на эквивалентные при вычислении предела. Можно ли делать такую замену в суммах? Приведите пример.
16. Дайте определение функции, непрерывной в точке и на промежутке. Изложите классификацию точек разрыва. Приведите примеры.
17. Сформулируйте теоремы: о непрерывности сложной функции; о непрерывности обратной функции; об арифметических свойствах непрерывных функций.
18. Что такое элементарная функция? Приведите примеры. Расскажите об области определения степенной функции $y = x^\alpha$ при разных $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Сформулируйте теорему о непрерывности элементарных функций.
19. Запишите первый и второй замечательный предел. Расскажите о шкале бесконечностей при $x \rightarrow +\infty$ и о выделении главного слагаемого из суммы функций.
20. Приведите таблицу эквивалентностей (с учётом возможной замены переменной). Запишите эти эквивалентности в виде равенств.
21. Сформулируйте лемму о вложенных отрезках, теорему Коши о промежуточном значении и следствие из неё. Объясните на примерах важность условий теоремы.
22. Изложите метод решения уравнений $f(x) = 0$ методом деления отрезка пополам. Приведите оценки точности.
23. Дайте определение подпоследовательности. Сформулируйте лемму Больцано–Вейерштрасса. Сформулируйте 1-ю теорему Вейерштрасса о функции непрерывной на отрезке. Объясните на примерах важность условий теоремы.
24. Дайте определение минимального (максимального) значения функции. Сформулируйте 2-ю теорему Вейерштрасса о функции непрерывной на отрезке. Объясните на примерах важность условий теоремы.
25. Дайте определение функции равномерно непрерывной на промежутке. Как связаны

непрерывность и равномерная непрерывность? Сформулируйте теорему Кантора.

Исследуйте на равномерную непрерывность функцию $y=1/x$ на $(0,1]$.

26. Исследуйте на равномерную непрерывность функции $y=kx+b$ на \mathbb{R} и $y=\sqrt{x}$ на $[0,+\infty)$.