

Метод анализа иерархий

16+



Шевченко Денис Вячеславович

e-mail: DV@ieml.ru

В vk.com/dv1973

Материалы лекции размещены по адресу:

www.ieml-math.narod.ru/lect/MPUR_MAI.pdf

Метод анализа иерархий

История и суть

В 1970 г. Томас Саати (США) разработал метод анализа иерархий (Analytic hierarchy process).

Относится к классу критериальных методов.

Получил широкое распространение и до сих пор активно используется в управленческой практике.

Приводит ЛПР не к «правильному» решению, а к варианту, наилучшим образом согласующемуся с его пониманием сути проблемы и требованиями к ее решению.

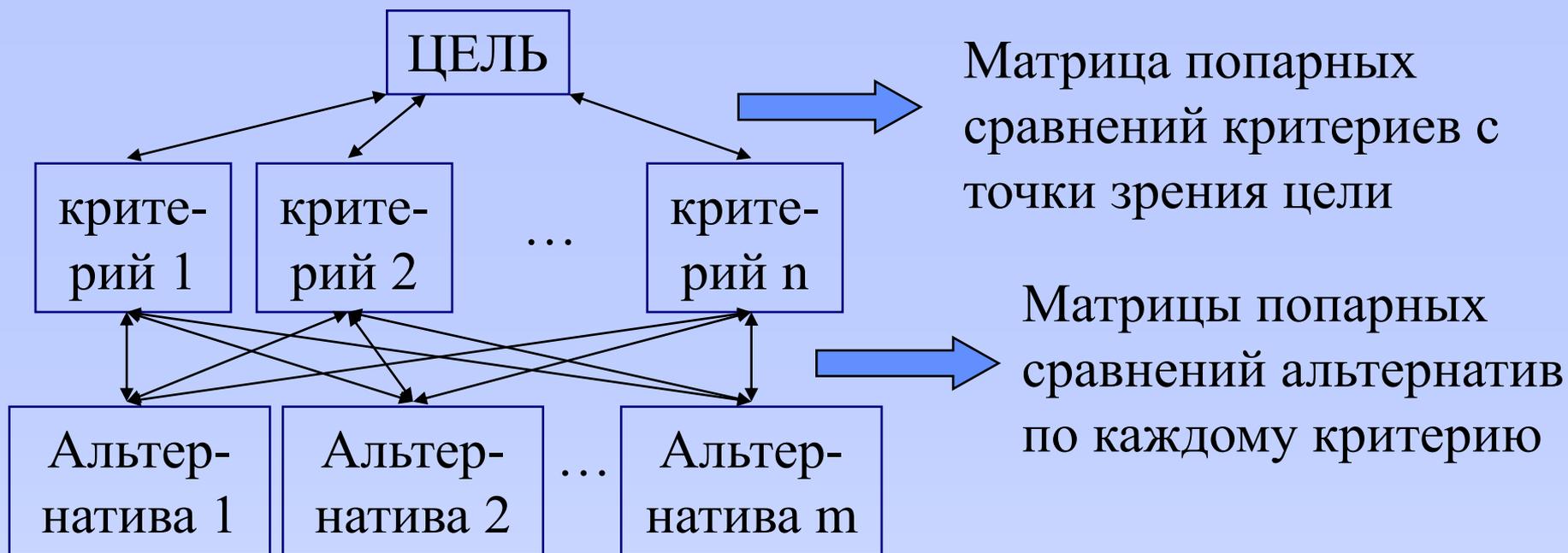
Метод анализа иерархий

Этапы метода

1. Выделение проблемы. Определение цели.
2. Выделение основных критериев и альтернатив.
3. Построение иерархии: дерево от цели через критерии к альтернативам.
4. Построение матрицы попарных сравнений критериев по цели и альтернатив по критериям.
5. Применение методики анализа полученных матриц.
6. Определение весов альтернатив по системе иерархии.

Метод анализа иерархий

Дерево критериев и альтернатив



В практике встречаются системы выбора решения с большим уровнем иерархий (4, 5, ...)

Метод анализа иерархий

Пример. Выбор рабочей квартиры

1. Цель: квартира для временного проживания сотрудников при частых командировках.

2. Основные критерии:

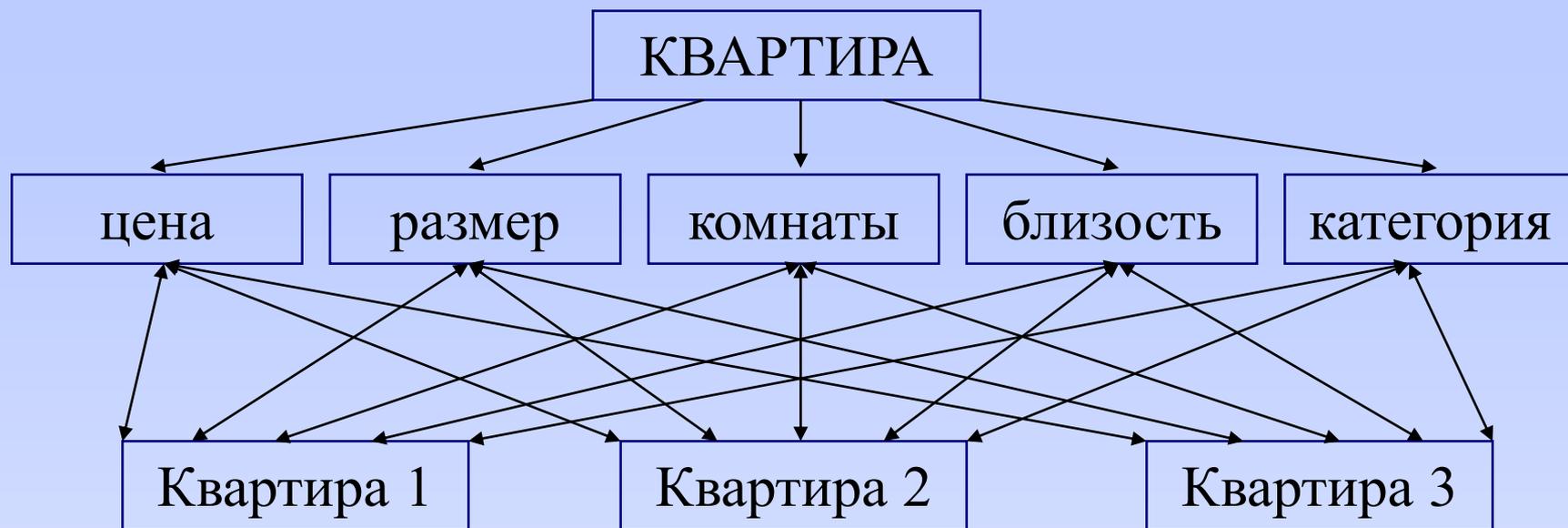
- цена;
- размер;
- количество комнат;
- близость к работе;
- категория дома.

Основные альтернативы (по объявлениям):

- Квартира 1
- Квартира 2
- Квартира 3

Метод анализа иерархий

3. Построение дерева альтернатив



Метод анализа иерархий

4. Построение матрицы попарных сравнений

4.1.1. Сравнение критериев.

Исходно попарное сравнение по качественной шкале, с последующим преобразованием в баллы:

равно, безразлично	= 1
немного лучше (хуже)	= 3 (1/3)
лучше (хуже)	= 5 (1/5)
значительно лучше (хуже)	= 7 (1/7)
принципиально лучше (хуже)	= 9 (1/9)

При промежуточном мнении используются промежуточные баллы 2, 4, 6, 8.

Метод анализа иерархий

4. Построение матрицы попарных сравнений

4.2.1. Составляем матрицу

a_{ij} – отношение критерия i к критерию j .

$$a_{ji} = 1/a_{ij} \quad a_{ii} = 1$$

	цена	размер	комнаты	близость	категория
цена	1	3	1	1/2	5
размер	1/3	1	1/4	1/7	2
комнаты	1	4	1	1	6
близость	2	7	1	1	8
категория	1/5	1/2	1/6	1/8	1

Метод анализа иерархий

4. Построение матрицы попарных сравнений

4.2. Сравнение альтернатив по критериям.

Составляем аналогичные матрицы сравнения вариантов (альтернатив) по каждому критерию:

цена	Квартира 1	Квартира 2	Квартира 3
Квартира 1	1	4	1/2
Квартира 2	1/4	1	1/5
Квартира 3	2	5	1

размер	Квартира 1	Квартира 2	Квартира 3
Квартира 1	1	1/2	3
Квартира 2	2	1	4
Квартира 3	1/3	1/4	1

КОМНАТЫ	Квартира 1	Квартира 2	Квартира 3
Квартира 1	1	1	2
Квартира 2	1	1	3
Квартира 3	1/2	1/3	1

БЛИЗОСТЬ	Квартира 1	Квартира 2	Квартира 3
Квартира 1	1	1/3	4
Квартира 2	3	1	5
Квартира 3	1/4	1/5	1

категория	Квартира 1	Квартира 2	Квартира 3
Квартира 1	1	2	1/5
Квартира 2	1/2	1	1/6
Квартира 3	5	6	1

Метод анализа иерархий

5. Методика анализа матриц

5.1.1. Находим сумму элементов каждого столбца.

$$S_j = a_{1j} + a_{2j} + \dots + a_{nj}$$

5.1.2. Делим все элементы матрицы на сумму элементов соответствующего столбца:

$$A_{ij} = \frac{a_{ij}}{S_j}$$

Данные два действия называются нормировкой матрицы.

Метод анализа иерархий

a_{ij}	цена	размер	комнаты	близость	категория
цена	1	3	1	$1/2=0,5$	5
размер	$1/3=0,333$	1	$1/4=0,25$	$1/7=0,143$	2
комнаты	1	4	1	1	6
близость	2	7	1	1	8
категория	$1/5=0,2$	$1/2=0,2$	$1/6=0,167$	$1/8=0,125$	1
СУММА	4,533	15,2	3,417	2,768	22

A_{ij}	цена	размер	комнаты	близость	категория
цена	$1/4,533$	$3/15,2$	$1/3,417$	$0,5/2,768$	$5/22$
размер	$0,333/4,533$	$1/15,2$	$0,25/3,417$	$0,143/2,768$	$2/22$
комнаты	$1/4,533$	$4/15,2$	$1/3,417$	$1/2,768$	$6/22$
близость	$2/4,533$	$7/15,2$	$1/3,417$	$1/2,768$	$8/22$
категория	$0,2/4,533$	$0,2/15,2$	$0,167/3,417$	$0,125/2,768$	$1/22$

Метод анализа иерархий

5.1.3. Находим среднее значение для каждой строки:

A_{ij}	цена	размер	комнаты	близость	категория	СРЗНАЧ
цена	0,221	0,197	0,293	0,181	0,227	0,224
размер	0,073	0,066	0,073	0,052	0,091	0,071
комнаты	0,221	0,263	0,293	0,361	0,273	0,282
близость	0,441	0,461	0,293	0,361	0,364	0,384
категория	0,044	0,013	0,049	0,045	0,045	0,039

5.1.4. Полученный столбец задает «веса» критериев с точки зрения поставленной цели.

Этот столбец называют **весовым столбцом критериев по цели.**

Метод анализа иерархий

5.1.5. Промежуточный вывод

	Вес в долях	Вес в процентах
цена	0,224	22,4%
размер	0,071	7,1%
комнаты	0,282	28,2%
близость	0,384	38,4%
категория	0,039	3,9%

С точки зрения удовлетворения нашей цели наиболее весомым является близость квартиры к месту работы (38,4%), далее следует количество комнат (28,2%), потом идет цена (22,4%). Размер и категория квартиры имеют наименьшие весовые коэффициенты, в сумме составляющие всего 11%.

Метод анализа иерархий

5.2.–5.6. Повторяем действия 5.1.1–5.1.5 для матриц попарного сравнения по критериям.

В итоге получаем столбцы (векторы) весовых коэффициентов объектов сравнения с точки зрения соответствия отдельным критериям.

Метод анализа иерархий

5.2. Критерий «Цена»

цена	Квартира 1	Квартира 2	Квартира 3
Квартира 1	1	4	$1/2=0,5$
Квартира 2	$1/4=0,25$	1	$1/5=0,2$
Квартира 3	2	5	1
СУММА	3,25	10	1,7

цена	Квартира 1	Квартира 2	Квартира 3
Квартира 1	$1/3,25$	$4/10$	$0,5/1,7$
Квартира 2	$0,25/3,25$	$1/10$	$0,2/1,7$
Квартира 3	$2/3,25$	$5/10$	$1/1,7$

цена	Квартира 1	Квартира 2	Квартира 3	СРЗНАЧ
Квартира 1	0,308	0,400	0,294	0,334
Квартира 2	0,077	0,100	0,118	0,098
Квартира 3	0,615	0,500	0,588	0,568

цена	Вес в долях	Вес в процентах
Квартира 1	0,334	33,4%
Квартира 2	0,098	9,8%
Квартира 3	0,568	56,8%

Получили вектор весов объектов по критерию «цена».

По критерию «цена» наиболее весомым (лучшим, интересным, симпатичным, ...) является Квартира 3 (56,8%), далее следует Квартира 1 (33,4%), и наименее интересна Квартира 2 (9,8%).

Если бы мы выбирали объект только по цене, то выбор уже сейчас был бы очевидным.

Метод анализа иерархий

5.3. Критерий «Размер»

размер	Квартира 1	Квартира 2	Квартира 3
Квартира 1	1	1/2=0.5	3
Квартира 2	2	1	4
Квартира 3	1/3=0.33	1/4=0.25	1
СУММА	3,33	1,75	8

размер	Квартира 1	Квартира 2	Квартира 3
Квартира 1	1/3,33	0,5/1,75	3/8
Квартира 2	2/3,33	1/1,75	4/8
Квартира 3	0,33/3,33	0,25/1,75	1/8

размер	Квартира 1	Квартира 2	Квартира 3	СРЗНАЧ
Квартира 1	0,300	0,286	0,375	0,320
Квартира 2	0,600	0,571	0,500	0,557
Квартира 3	0,100	0,143	0,125	0,123

размер	Вес в долях	Вес в процентах
Квартира 1	0,320	32%
Квартира 2	0,557	55,7%
Квартира 3	0,123	12,3%

Получили вектор весов объектов по критерию «размер».

По критерию «размер» наиболее весомым является Квартира 2 (55,7%), далее следует Квартира 1 (32%), и наименее интересна Квартира 3 (12,3%).

Метод анализа иерархий

5.4. Критерий «Комнаты»

КОМНАТЫ	Квартира 1	Квартира 2	Квартира 3
Квартира 1	1	1	2
Квартира 2	1	1	3
Квартира 3	1/2	1/3	1
СУММА	2,5	2,33	6

КОМНАТЫ	Квартира 1	Квартира 2	Квартира 3
Квартира 1	1/2,5	1/2,33	2/6
Квартира 2	1/2,5	1/2,33	3/6
Квартира 3	0,5/2,5	0,33/2,33	1/6

КОМНАТЫ	Квартира 1	Квартира 2	Квартира 3	СРЗНАЧ
Квартира 1	0,400	0,429	0,333	0,387
Квартира 2	0,400	0,429	0,500	0,443
Квартира 3	0,200	0,143	0,167	0,170

КОМНАТЫ	Вес в долях	Вес в процентах
Квартира 1	0,387	38,7%
Квартира 2	0,443	44,3%
Квартира 3	0,170	17%

Получили вектор весов объектов по критерию «Комнаты».

По критерию «комнаты» наиболее весомым является Квартира 2 (44,3%), далее следует Квартира 1 (38,7%), и наименее интересна Квартира 3 (17%).

Метод анализа иерархий

5.5. Критерий «Близость»

БЛИЗОСТЬ	Квартира 1	Квартира 2	Квартира 3
Квартира 1	1	1/3	4
Квартира 2	3	1	5
Квартира 3	1/4	1/5	1
СУММА	4.25	1.53	10

БЛИЗОСТЬ	Квартира 1	Квартира 2	Квартира 3
Квартира 1	1/4,25	0,33/1,53	4/10
Квартира 2	3/4,25	1/1,53	5/10
Квартира 3	0,25/4,25	0,2/1,53	1/10

БЛИЗОСТЬ	Квартира 1	Квартира 2	Квартира 3	СРЗНАЧ
Квартира 1	0,235	0,217	0,400	0,284
Квартира 2	0,706	0,652	0,500	0,619
Квартира 3	0,059	0,130	0,100	0,096

БЛИЗОСТЬ	Вес в долях	Вес в процентах
Квартира 1	0,284	28,4%
Квартира 2	0,619	61,9%
Квартира 3	0,096	9,6%

Получили вектор весов объектов по критерию «близость».

По критерию «близость» наиболее весомым является Квартира 2 (61,9%), далее следует Квартира 1 (28,4%), и наименее интересна Квартира 3 (9,6%).

Метод анализа иерархий

5.6. Критерий «Категория»

категория	Квартира 1	Квартира 2	Квартира 3
Квартира 1	1	2	1/5
Квартира 2	1/2	1	1/6
Квартира 3	5	6	1
СУММА	6,5	9	1,37

категория	Квартира 1	Квартира 2	Квартира 3
Квартира 1	1/6,5	2/9	0,2/1,37
Квартира 2	0,5/6,5	1/9	0,17/1,37
Квартира 3	5/6,5	6/9	1/1,37

категория	Квартира 1	Квартира 2	Квартира 3	СРЗНАЧ
Квартира 1	0,154	0,222	0,146	0,174
Квартира 2	0,077	0,111	0,122	0,103
Квартира 3	0,769	0,667	0,732	0,723

категория	Вес в долях	Вес в процентах
Квартира 1	0,174	17,4%
Квартира 2	0,103	10,3%
Квартира 3	0,723	72,3%

Получили вектор весов объектов по критерию «категория».

По критерию «категория» Квартира 3 (72,3%) существенно перевешивает и Квартиру 1 (17,4%), и Квартиру 2 (10,3%).

Метод анализа иерархий

6. Определение весов альтернатив

В результате пункта 5 сформированы:

вектор весов критериев;

матрица весов альтернатив по каждому критерию (состоящая из полученных весовых столбцов).

	Вес в долях
цена	0,224
размер	0,071
комнаты	0,282
близость	0,384
категория	0,039

	цена	размер	комнаты	близость	категория
Квартира 1	0,334	0,320	0,387	0,284	0,174
Квартира 2	0,098	0,557	0,443	0,619	0,103
Квартира 3	0,568	0,123	0,170	0,096	0,723

Метод анализа иерархий

6. Определение весов альтернатив

Умножая полученную матрицу на столбец по правилу строка на столбец (матрично), получаем веса альтернатив с точки зрения достижения цели:

$$\begin{pmatrix} 0,334 & 0,320 & 0,387 & 0,284 & 0,174 \\ 0,098 & 0,557 & 0,443 & 0,619 & 0,103 \\ 0,568 & 0,123 & 0,170 & 0,096 & 0,723 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,224 \\ 0,071 \\ 0,282 \\ 0,384 \\ 0,039 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,323 \\ 0,428 \\ 0,249 \end{pmatrix}$$

Метод анализа иерархий

6. Определение весов альтернатив

В результате получаем веса альтернатив с точки зрения достижения поставленной цели:

	Вес в долях	Вес в %
Квартира 1	0,323	32,3%
Квартира 2	0,428	42,8%
Квартира 3	0,249	24,9%

Таким образом, Квартира 2 является наиболее привлекательной для данной цели.

Если же мы будем приобретать две квартиры, то это будут квартиры 2 и 3.

Метод анализа иерархий

Замечание о матрицах весов

	Вес в долях
цена	0,224
размер	0,071
комнаты	0,282
близость	0,384
категория	0,039

	цена	раз- мер	ком- наты	бли- зость	кате- гория
Квартира 1	0,334	0,320	0,387	0,284	0,174
Квартира 2	0,098	0,557	0,443	0,619	0,103
Квартира 3	0,568	0,123	0,170	0,096	0,723

Полученные в п.5 матрицы часто имеют собственную ценность.

Например, в этом случае, вектор весов критериев может использоваться многократно для разных городов и разных годов. Кроме того, из него можно сделать вывод о малой важности критериев «размер» и «категория» и исключения их из рассмотрения.

В других случаях неоднократно можно использовать матрицу весов альтернатив по критериям.

Метод анализа иерархий

Замечание об автоматизации вычислений

Все описанные в данной лекции вычисления легко реализовать в MS Excel.

1. Этап заполнения матрицы (жирным показаны заполняемые клетки, остальные вычисляются по формулам):

	A	B	C	D	E
1		Критерий1	Критерий2	Критерий3	Критерий4
2	Критерий1	1	4	0.25	5
3	Критерий2	=1/C2	1	2	3
4	Критерий3	=1/D2	=1/D3	1	8
5	Критерий4	=1/E2	=1/E3	=1/E4	1

	A	B	C	D	E
1		Критерий1	Критерий2	Критерий3	Критерий4
2	Критерий1	1	4	1/4	5
3	Критерий2	1/4	1	2	3
4	Критерий3	4	1/2	1	8
5	Критерий4	1/5	1/3	1/8	1

Результат
вычислений.

Метод анализа иерархий

2. Этап поиска суммы и деления на нее:

	A	B	C	D	E
1		Критерий1	Критерий2	Критерий3	Критерий4
2	Критерий1	1	4	0.25	5
3	Критерий2	=1/C2	1	2	3
4	Критерий3	=1/D2	=1/D3	1	8
5	Критерий4	=1/E2	=1/E3	=1/E4	1
6	СУММА	=СУММ(B2:B5)	=СУММ(C2:C5)	=СУММ(D2:D5)	=СУММ(E2:E5)
7					
8		Критерий1	Критерий2	Критерий3	Критерий4
9	Критерий1	=B2/B\$6	=C2/C\$6	=D2/D\$6	=E2/E\$6
10	Критерий2	=B3/B\$6	=C3/C\$6	=D3/D\$6	=E3/E\$6
11	Критерий3	=B4/B\$6	=C4/C\$6	=D4/D\$6	=E4/E\$6
12	Критерий4	=B5/B\$6	=C5/C\$6	=D5/D\$6	=E5/E\$6

Будьте осторожнее с выбором абсолютных и относительных ссылок!

Результат вычислений:

	A	B	C	D	E
1		Критерий1	Критерий2	Критерий3	Критерий4
2	Критерий1	1	4	1/4	5
3	Критерий2	1/4	1	2	3
4	Критерий3	4	1/2	1	8
5	Критерий4	1/5	1/3	1/8	1
6	СУММА	5.450	5.833	3.375	17.000
7					
8		Критерий1	Критерий2	Критерий3	Критерий4
9	Критерий1	0.18	0.69	0.07	0.29
10	Критерий2	0.05	0.17	0.59	0.18
11	Критерий3	0.73	0.09	0.30	0.47
12	Критерий4	0.04	0.06	0.04	0.06

Метод анализа иерархий

3. Этап определения среднего значения в строке (весавого столбца):

	A	B	C	D	E	F
1		Критерий1	Критерий2	Критерий3	Критерий4	
2	Критерий1	1	4	0.25	5	
3	Критерий2	=1/C2	1	2	3	
4	Критерий3	=1/D2	=1/D3	1	8	
5	Критерий4	=1/E2	=1/E3	=1/E4	1	
6	СУММА	=СУММ(B2:B5)	=СУММ(C2:C5)	=СУММ(D2:D5)	=СУММ(E2:E5)	
7						
8		Критерий1	Критерий2	Критерий3	Критерий4	СРЗНАЧ
9	Критерий1	=B2/B\$6	=C2/C\$6	=D2/D\$6	=E2/E\$6	=СРЗНАЧ(B9:E9)
10	Критерий2	=B3/B\$6	=C3/C\$6	=D3/D\$6	=E3/E\$6	=СРЗНАЧ(B10:E10)
11	Критерий3	=B4/B\$6	=C4/C\$6	=D4/D\$6	=E4/E\$6	=СРЗНАЧ(B11:E11)
12	Критерий4	=B5/B\$6	=C5/C\$6	=D5/D\$6	=E5/E\$6	=СРЗНАЧ(B12:E12)

Результат
вычислений:

	A	B	C	D	E	F
1		Критерий1	Критерий2	Критерий3	Критерий4	
2	Критерий1	1	4	1/4	5	
3	Критерий2	1/4	1	2	3	
4	Критерий3	4	1/2	1	8	
5	Критерий4	1/5	1/3	1/8	1	
6	СУММА	5.450	5.833	3.375	17.000	
7						
8		Критерий1	Критерий2	Критерий3	Критерий4	СРЗНАЧ
9	Критерий1	0.18	0.69	0.07	0.29	0.309
10	Критерий2	0.05	0.17	0.59	0.18	0.247
11	Критерий3	0.73	0.09	0.30	0.47	0.397
12	Критерий4	0.04	0.06	0.04	0.06	0.047

Метод анализа иерархий

4. Этап умножения матриц

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
13									
14									
15							0.224		
16	0.334	0.32	0.387	0.284	0.174		0.071		=МУМНОЖ(A16:E18;G15:G19)
17	0.098	0.557	0.443	0.619	0.103		0.282		=МУМНОЖ(A16:E18;G15:G19)
18	0.568	0.123	0.17	0.096	0.723		0.384		=МУМНОЖ(A16:E18;G15:G19)
19							0.039		

Не забудьте ввести формулу как формулу массива. После ввода надо выделить диапазон размещения результата, начиная с ячейки, содержащей формулу. Нажмите клавишу F2, а затем нажмите клавиши CTRL+SHIFT+ENTER.

Результат
вычислений:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
13									
14									
15							0.224		
16	0.334	0.320	0.387	0.284	0.174		0.071		0.322512
17	0.098	0.557	0.443	0.619	0.103		0.282		0.428138
18	0.568	0.123	0.170	0.096	0.723		0.384		0.248966
19							0.039		

Метод анализа иерархий

Замечание о листах Excel

Рекомендуется:

1. Один раз аккуратно организовать работу с матрицей сравнения альтернатив по первому критерию на отдельном листе.
2. Скопировать лист в количестве, соответствующем числу критериев. Назвать листы соответственно.
3. Исправить на каждом листе лишь верхнюю диагональную часть матрицы попарных сравнений. Результат сразу будет получен.

Метод анализа иерархий

Лекция окончена

Спасибо за внимание

Вопросы ???

Материалы лекции размещены по адресу:

www.ieml-math.narod.ru/lect/MPUR_MAI.pdf