

**Международная конференция
по дифференциальным уравнениям
и динамическим системам**

Тезисы докладов



Суздаль
4 - 9 июля 2014 года

Рашид А.С., Свиридюк Г.А.	145
Линейные уравнения соболевского типа с относительно p - радиальными операторами в квазибанаховых пространствах	
Родина Л.И.	146
Условия инвариантности и вырождения для вероятностной модели популяционной динамики	
Романов А.В.	148
Инерциальные многообразия параболических уравнений	
Рошупкин С.А.	149
Псевдодифференциальные операторы Киприянова-Катрахова с негладкими символами	
Рузакова О.А., Золотарева Е.А.	151
Об управляемости начально-конечной задачи для уравнения соболевского типа с (L, p) -ограниченным оператором	
Савчук А.М.	152
Некоторые теоремы об интерполяции нелинейных отображений	
Сагадеева М.А.	153
Об оптимальном управлении решениями одного нестационарно- го уравнения соболевского типа	
Садовничая И.В.	154
Об асимптотических формулах для собственных значений и собственных функций системы Дирака	
Сакбаев В.Ж.	155
О явлении взрыва решений дифференциальных уравнений и случайных полугруппах	
Сафонова Т.А.	155
О квазирегулярности дифференциального оператора четвертого порядка с сингулярными коэффициентами	
Сахаров А.Н.	156
Функции Ляпунова и топологическая классификация потоков Морса-Смейла	
Сачкова Е.Ф.	157
Аномальные траектории в субримановой задаче с вектором роста $(2, 3, 5, 8)$	
Сидоров Е.А., Папшева Е.А.	158
О некоторых случаях в задаче о периодических решениях дифференциальных уравнений с частными производными	
Сильченко П.Н., Кудрявцев И.В., Михнев М.М.	160
Подходы к решению системы дифференциальных уравнений для элемента волноводного тракта космических аппаратов	
Сиражудинов М.М., Пастухова С.Е., Джамалудинова С.П.	162
Метод асимптотических разложений для системы уравнений Бельтрами	
Солдатов А.П.	163
О разрешимости задачи Дирихле на двумерных стратифициро- ванных множествах	
Сурначёв М.Д.	164
Нелинейные параболические уравнения, вырождающиеся на части области	

Романов А.В. (Россия)

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
av.romanov@hse.ru

Теория инерциальных многообразий представляет собой одну из реализаций восходящего к Э. Хопфу представления о том, что финальная динамика диссипативной эволюционной системы с бесконечным числом степеней свободы реально может контролироваться конечным числом параметров. Основным объектом исследования при этом оказывается класс полулинейных параболических уравнений

$$\partial_t u = -Au + F(u)$$

в сепарабельном бесконечномерном гильбертовом пространстве $(X, \|\cdot\|)$ с ливингстон-неограниченным положительно-определённым оператором A и подчинённой ему нелинейной функцией F .

Предполагая, что уравнение (1) порождает [1] гладкий полупоток в фазовом пространстве $H = D(A^\alpha)$, $0 \leq \alpha < 1$, с $\|u\|_H = \|A^\alpha u\|$, определим глобальный аттрактор как совокупность всех целых ограниченных траекторий $u(t) \in H$, $t \in (-\infty, +\infty)$, а инерциальное многообразие (ИМ) как гладкую конечномерную инвариантную поверхность $M \subset H$, содержащую аттрактор и экспоненциально притягивающую с асимптотической скоростью траектории $u(t) \subset H$ при $t \rightarrow +\infty$. Сужение (1) на M представляет собой инерциальную формулу – ОДУ, полностью описывающее финальную динамику исходного уравнения.

Современное состояние теории инерциальных многообразий отражено в недавней работе [2]. Установить наличие ИМ до сих пор удаётся для не слишком широкого класса параболических задач, включающего в себя: системы уравнений реакции-диффузии

$$u_t = \Delta u + f(x, u)$$

в $(0, 1)^N$, $N \leq 2$, и скалярные уравнения такого рода в ряде ограниченных областей $\Omega \subset \mathbb{R}^N$; уравнения Гинзбурга – Ландау и обобщённые уравнения Кана – Хилларда в $(0, 1)^N$, $N \leq 2$; одномерные уравнения Курамото – Сивашинского и Колмогорова – Сивашинского; нелинейные версии нелинейного уравнения Бюргера на торах T^N , $N \leq 2$; уравнения Свифта – Хохенберга в произвольных ограниченных областях $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Проблемы возникают с ростом размерности задачи, например, существование инерциального многообразия не доказано даже для скалярных уравнений (2) в круге не говоря уже о двумерных уравнениях Навье – Стокса. Лучше обстоит дело с параболическими задачами на компактных замкнутых поверхностях. В частности, векторные уравнения (2) на сфере S^N обладают ИМ в любой размерности N .

С другой стороны, известные примеры [3, 4] отсутствия инерциального многообразия для уравнений вида (1) выглядят искусственно и не имеют отношения к реальным задачам математической физики. В качестве относительно физического примера подобного рода предлагается интегро-дифференциальное уравнение

$$u_t = ((I + B)u_x)_x + f(x, u, u_x)$$

на единичной окружности Γ с вещественным пространством $X = L^2(\Gamma)$. Здесь $I = \text{id}$, $x \in \Gamma$

$$(Bh)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \left| \sin \frac{x+y}{2} \right| h(y) dy$$

для $h \in X$ и определённая на $\Gamma \times \mathbb{R}^2$ функция $f(x, s, p)$ предполагается бесконечно гладкой, но не аналитической. При этом $\partial_x B = J$, где оператор

$$(Jh)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{ctg} \frac{x+y}{2} h(y) dy$$

НИЙ

мики»

ий восходящ
эволюционн
ть конечн
ывается клас

) с линейн
ему нелинейн

ок в фазов
им глобальн
, $t \in (-\infty, +\infty)$
ую поверхно
этической фаз
диальную форм

ено в недавн
широкого клас
рфузии

бластей $\Omega \subset \mathbb{R}^N$
в $(0, 1)^N$, $N \leq 2$
ского; некоторы
ения Свифта
никают с ростом
не доказано дав
к Навье – Стокс
к поверхности
мерности N .
ого многообраз
сальным задаче
подобного ре

сь $I = \text{id}$, $x \in \mathbb{R}^N$

сконечно гладк

является лёгкой модификацией интегрального оператора Гильберта. Оператор $I + B$ в (3) играет роль вырожденного нелокального коэффициента диффузии. Каноническую линейную часть данного уравнения определим равенством $Au = u - u_{xx}$.

ТЕОРЕМА ([5]). При подходящем выборе функции $f(x, s, p)$ уравнение (3) порождает каждый диссипативный полупоток в $H = D(A^\theta)$, $\theta \in (3/4, 1)$, причём аттрактор этого уравнения не содержится ни в каком инвариантном конечномерном C^1 -многообразии $M \subset H$.

Фактически, строится функция $f(x, s, p)$ такая, что в абстрактной задаче (3) соответствующее уравнению (3) векторное поле $F(u) - Au$ имеет стационарные точки $u_0, u_1 \in H$ и спектры σ_0, σ_1 его линеаризации в этих точках обладают свойствами: $\sigma_0 \cap R = \emptyset$ и $\sigma_1 \cap R = \{\lambda\}$, где λ – простое положительное собственное значение. Отсюда следует [4], что невозможно провести через u_0, u_1 гладкое инвариантное конечномерное многообразие $M \subset H$.

Несколько более слабая версия данной теоремы получена в [6].

Литература

- [1] Sell G.R., You Y. Dynamics of evolutionary equations, Springer, N-Y, 2002.
- [2] Zelik S. Inertial manifolds and finite-dimensional reduction for dissipative PDEs, arXiv:1303.4457 [math.AP], 2013.
- [3] Романов А.В. Три контрпримера в теории инерциальных многообразий, Матем. заметки, 68:3 (2000), 439–445.
- [4] Еден А., Зелик С.В., Калантаров В.К. Контрпримеры к регулярности проекций Мане в теории аттракторов, Успехи матем. наук, 68:2 (2013), 3–32.
- [5] Романов А.В. Параболическое уравнение с нелокальной диффузией без гладкого инерциального многообразия, Матем. заметки (2014), принято в печать.
- [6] Alexander V. Romanov, Parabolic equation with nonlocal diffusion without a smooth inertial manifold, arXiv:1306.4249 [math.AP], 2013.

ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ КИПРИЯНОВА-КАТРАХОВА С НЕГЛАДКИМИ СИМВОЛАМИ

Рощупкин С.А. (Россия)

Елецкий государственный университет имени И. А. Бунина
roshupkinsa@mail.ru

Ядро полного преобразования Фурье-Бесселя введено И.А. Киприяновым и В.В. Катраховым в [1]. Здесь вводится общий вид такого ядра, который включает произведение операторов Киприянова-Катрахова по части переменных $x' = (x_1, \dots, x_n)$, а по другой части $x'' = (x_{n+1}, \dots, x_N)$, ядро преобразования Фурье имеет вид

$$\Lambda_\gamma^\pm(x', \xi') = \prod_{j=1}^n \left(j^{\frac{\gamma-1}{2}}(x_j \xi_j) \mp i \frac{x_j \xi_j}{\gamma+1} j^{\frac{\gamma+1}{2}}(x_j \xi_j) \right) e^{\mp i \langle x'', \xi'' \rangle},$$

$J_\nu(t)$ – j -функция Бесселя, связанная с функцией Бесселя первого рода J_ν равенством $J_\nu(t) = C(\nu) \cdot \frac{J_\nu(t)}{t^\nu}$, $\langle x'', \xi'' \rangle = \sum_{j=n+1}^N x_j \xi_j$. На основе Λ^\pm вводится смешанное интегральное преобразование Фурье-Бесселя (прямое и обратное)

$$\mathcal{F}_B[f] = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \Lambda_\gamma^+(x, \xi) (x')^\gamma dx, \quad \mathcal{F}_B^-[f] = C(\gamma) \int_{\mathbb{R}^N} f(\xi) \Lambda_\gamma^-(x, \xi) (\xi')^\gamma d\xi.$$