В. В. Лакшина, А. М. Силаев
Национальный исследовательский университет
Высшая школа экономики – Нижний Новгород

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛАТИЛЬНОСТИ С ПОМОЩЬЮ МАРКОВСКОГО ПЕРЕКЛЮЧАЮЩЕГОСЯ МУЛЬТИФРАКТАЛА

Введение

Существует два основных подхода к моделированию волатильности: первый и более ранний основан на предположении об ее постоянстве. Примерами служат историческая волатильность, метод экспоненциального сглаживания, подразумеваемая волатильность в модели Блэка-Шоулса [1]. Второй подход, наоборот, учитывает возможную изменчивость волатильности. Первая группа таких моделей, к которой относятся модели семейства GARCH или авторегрессионные модели условной гетероскедастичности, основывается на представлении волатильности в виде функции от наблюдаемых доходностей с заданным набором переменных [3], [8]. Во второй группе моделей волатильность описывается уравнениями, содержащими дополнительный источник неопределенности. Данную категорию составляют модели стохастической волатильности.

За последние 15 лет особую популярность приобрели модели стохастической волатильности с переключающимися режимами [7]. При этом предполагается, что волатильность может принимать одно из нескольких значений (состояний, режимов) и изменения состояний происходят случайным образом. Поскольку математический аппарат моделей с переключающимися режимами весьма сложен, исследователи, анализируя эмпирические данные, ограничиваются небольшим числом дискретных состояний волатильности. На практике основная сложность заключается в вычислении элементов матрицы перехода марковского процесса, количество параметров которой растет пропорционально квадрату количества состояний волатильности. Естественным решением данной проблемы является уменьшение числа состояний волатильности, например, до четырех [2]. Решение данной проблемы было предложено в [4, 6]. Оно основано на применении определённого набора ограничений, используемых в мультифрактальных моделях.

В настоящей работе внимание сосредоточено на марковском переключающемся мультифрактальном процессе, или сокращенно MSM-процессе. Эта модель имеет ряд преимуществ. Главное состоит в том, что число оцениваемых параметров равно 5, при этом количество состояний волатильности варьируется от 2 до 1024. Более того MSM-процесс обладает функцией правдоподобия, которую можно вывести аналитически, что упрощает процедуру оценивания.

Работа разделена на 4 части: первая посвящена описанию MSM-процесса, вторая – проверке результатов работы эстиматора, в третьей оценены параметры для реальных финансовых рядов, в четвертой части проведено сравнение полученных оценок с оценками моделей семейства GARCH.

Описание MSM-процесса

В MSM-процессе логарифмическая доходность (далее доходность) моделируется как произведение волатильности на гауссов шум:

$$x_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad t = 1,2,\ldots,T. \tag{1}$$

При этом волатильность σ_t равна:

$$\sigma_t = \sigma \left(\prod_{k=1}^{\bar{k}} M_{k,t} \right)^{1/2}, \tag{2}$$

где σ – положительная константа, ε_t – случайные величины, распределенные по нормальному закону с нулевым средним и единичной дисперсией. Множители $M_{k,t}$ неотрицательные, причем $E\left(M_{k,t}\right) = 1$, $k \in \left\{1,2,\ldots,\bar{k}\right\}$. Для простоты считается, что множители статистически независимы в момент времени t. В каждый момент времени $M_{k,t}$ выбирается статистически независимо из заданного распределения $F(M)$ с вероятностью γ_k или остается равным предыдущему значению:

$$M_{k,t} = \begin{cases} M & \text{с вероятностью} \quad \gamma_k\ , \\ M_{k,t-1} & \text{с вероятностью} \quad 1-\gamma_k . \end{cases} \tag{3}$$

Каждому множителю $M_{k,t}$ соответствует своя вероятность переключения γ_k, а распределение $F(M)$ одинаково для всех множителей.

Вероятности переключения γ_k, где $k \in \{1,2,\ldots,\bar{k}\}$, таковы, что

$$\gamma_k = 1-(1-\gamma_1)^{b^{k-1}}, \quad k \in \{1,2,\ldots,\bar{k}\}, \tag{4}$$

где $\gamma_1 \in (0,1)$, $b \in (1,\infty)$. Такое определение вероятностей перехода дано в [6] и связано с дискретизацией пуассоновского процесса. Из уравнения (4) следует, что вероятность переключения $\gamma_{\bar{k}}$ меньше единицы и больше остальных вероятностей переключения. Поэтому вместо γ_1 удобнее оценивать $\gamma_{\bar{k}}$.

MSM модель предполагает всего два ограничения на случайную величину M и ее распределение $F(M)$: неотрицательность $M \geq 0$ и единичное математической ожидание $E(M)=1$. Это предоставляет широкие возможности для задания как параметрических, так и непараметрических спецификаций $F(M)$ [4], [6].

В простейшем случае M принимает всего два значения с равными вероятностями, то есть ее плотность вероятности состоит из двух дельта-функций:

$$f(M) = 0{,}5\delta(M-m_0)+0{,}5\delta(M-m_1),\ m_1 = 2-m_0. \tag{5}$$

Следует отметить, что даже в этом простейшем случае модель нетривиальна и позволяет учесть важное свойство масштабной инвариантности.

Таким образом, чтобы определить *MSM* модель, нужно оценить четыре параметра:

- m_0, характеризующее распределение множителей $M_{k,t}$, $m_0 \in (1,2)$;
- σ, безусловное стандартное отклонение доходностей, $\sigma \in (0,\infty)$;
- $b \in (1,\infty)$;
- $\gamma_{\bar{k}} \in (0,1)$.

Параметры b и $\gamma_{\bar{k}}$ определяют набор вероятностей перехода, при этом значение $\bar{k}$ задается экзогенно.

Необходимо отметить, что γ_k характеризует частоту переключения множителя (волатильной компоненты) $M_{k,t}$. Соответственно обратная величина $1/\gamma_k$ указывает на средний период времени, в течение которого волатильная компонента $M_{k,t}$ будет сохранять свое значение. Поскольку вероятности γ_k согласно (4) упорядочены следующим образом:

$$\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_{\bar{k}},$$

поэтому компонента $M_{1,t}$ называется низкочастотной, так как ей соответствует наименьшая вероятность переключения γ_1 в каждый момент времени, а компонента $M_{\bar{k},t}$ называется высокочастотной, так как для нее вероятность переключения $\gamma_{\bar{k}}$ наибольшая.

Численный эксперимент

Для максимизации функции правдоподобия MSM-процесса использовался численный метод нулевого порядка Нелдера-Мида для безусловной оптимизации функций [9].

Для проверки эффективности оценки был проведен следующий численный эксперимент. Генерировались $N = 200$ независимых реализаций *MSM*-процесса, каждая длительности T с экзогенно выбранными истинными значениями параметров $\{b, \gamma_{\bar{k}}, m_0, \sigma\}$ и параметром $\bar{k} = 4$. Для каждой реализации находились оценки параметров. Затем для каждого параметра вычислялись средние значения оценок по всем реализациям, стандартные отклонения SE и квадратные корни из среднеквадратической ошибки $RMSE$.

По итогам численного эксперимента выяснилось, что наиболее трудными для оценки оказались параметры b и $\gamma_{\bar{k}}$, именно у них наблюдается наибольшая разность между ошибками SE и $RMSE$. Точность оценивания ухудшается, если истинные значения параметров близки границам допустимых интервалов.

Результаты оценки эмпирических данных

Для оценки были выбраны дневные цены акций компании «Аэрофлот» (AFLT), компании «Газпром» (GAZP) и обменный курс рубля к доллару США (USD/RUB) за период с 01.01.06 по 16.05.12. Исторические цены финансовых активов можно найти в базах данных Yahoo!Finance и компании Финам.

В табл. 1 содержатся результаты оценивания параметров рассматриваемой модели доходности. В каждом столбце находятся оценки соответствующих параметров для различных значений параметра $\bar{k}$. При $\bar{k} = 1$ получается стандартная марковская модель с переключениями, в которой волатильность принимает всего два значения m_0 и $2 - m_0$. При росте значений параметра $\bar{k}$ число состояний волатильности растет, как $2^{\bar{k}}$ и при $\bar{k} = 8$ достигает величины 256. В табл. 1 LL – значение логарифма функции правдоподобия для данного набора параметров.

Таблица 1

Оценки параметров модели

$\bar{k}$	1	2	3	4	5	6	7	8
AFLT								
b	2,4990	1,0100	4,2670	4,8864	9,7742	5,7669	5,7971	5,8032
$\gamma_{\bar{k}}$	0,0164	0,1330	0,5683	0,6457	0,3381	0,7070	0,7093	0,7098
m_0	1,9994	1,7811	1,6553	1,6173	1,7119	1,6205	1,6205	1,6205
σ	0,8760	0,0304	0,0250	0,0332	0,1546	0,0891	0,1448	0,2351
LL	3719,4	3965,9	3973,2	3978,8	3971,8	3976,45	3975,6	3974,9
GAZP								
b	2,5046	2,6766	2,9058	4,3465	3,5778	4,6400	4,3450	3,9919
$\gamma_{\bar{k}}$	0,0143	0,0225	0,0458	0,1349	0,0479	0,0612	0,0579	0,1545
m_0	1,9993	1,6481	1,6124	1,4933	1,6142	1,6153	1,6155	1,4618
σ	0,8768	0,0469	0,0378	0,0409	0,0986	0,1622	0,1274	0,0195
LL	3484,9	3708,3	3725,7	3729,2	3723,4	3722,8	3723,7	3727,5
USD/RUB								
b	2,5093	1,0100	8,4035	3,5970	4,0528	3,7041	2,5883	4,3180
$\gamma_{\bar{k}}$	0,0131	0,3030	0,7893	0,8763	0,6887	0,9900	0,9557	0,9900
m_0	2,0000	1,8039	1,7021	1,6379	1,7258	1,7009	1,4798	1,5031
σ	0,8763	0,0062	0,0064	0,0058	0,0140	0,0068	0,0054	0,0046
LL	7638,1	8019,3	8102,3	8097,6	8084,4	8092,4	8117,2	8125,7

Для акций максимум функции правдоподобия достигается при $\bar{k} = 4$. Для обменного курса наблюдается тенденция к росту значения функции правдоподобия с ростом $\bar{k}$. Прежде чем обсудить результаты необходимо выяснить, какая из моделей $MSM\left(\bar{k}\right)$ лучше описывает данные.

Выбор модели осуществлялся с помощью теста Вонга, а также информационных критериев Акайке и Шварца. Набор параметров для каждого финансового ряда представлен в табл. 2.

Таблица 2

Окончательные наборы параметров

	$\bar{k}$	b	$\gamma_{\bar{k}}$	m_0	σ
AFLT	4	4,8864	0,6457	1,6173	0,0332
GAZP	4	4,3465	0,1349	1,4933	0,0409
USD/RUB	8	4,3180	0,9900	1,5031	0,0046

Следующая часть работы посвящена сравнению MSM-модели с моделями GARCH, EGARCH и GJR. Сравнение проводилось на основании информационных критериев Акайке и Шварца.

Показано, что в случае нормально распределенных инноваций в GARCH-моделях MSM-процесс превосходит их при внутривыборочном (in - sample) сравнении.

Необходимо отметить, что в [4] авторы использовали для анализа только валютные курсы. Для этих данных функция правдоподобия склонна расти с ростом $\bar{k}$. Данная тенденция подтверждена и в настоящей работе. Кроме этого, параметры были оценены и для акций. Здесь функция правдоподобия вела себя иначе, не обнаруживая тенденций к росту.

Заключение

В настоящей работе рассмотрены модель марковского мультифрактальных случайного процесса с переключающимися режимами изменения (MSM-модель) для описания волатильности финансовых активов.

1. Найдена функция правдоподобия для MSM-модели.

2. Проведено имитационное моделирование алгоритма оценивания параметров моделей методом максимального правдоподобия. При этом использовался численный алгоритм Нелдера-Мида для безусловной оптимизации функций.

3. Получены оценки параметров MSM-моделей для ряда финансовых активов по историческим данным. Подбор параметров моделей проводился с помощью теста Вонга.

4. Найдены стандартные ошибки оценок параметров и вычислены длины циклов волатильности для рассматриваемых активов.

5. Проведено внутривыборочное сравнение MSM-модели с моделями семейства GARCH. Сравнение проводилось по информационным критериям Акайке и Шварца.

В целом результаты работы подтверждают возможность описания MSM-моделями наблюдаемых эмпирических данных цен финансовых активов и работоспособность алгоритмов оценивания параметров этих моделей с помощью метода максимального правдоподобия.

Список литературы

1. Black F., Scholes M. Pricing of options and corporate liabilities // Journal of Political Economy, 1973. V. 81, No. 3. Pp. 637 – 654.
2. Bollen N., Gray S., Whal R. Regime Switching in Foreign Exchange Rates: Evidence from Currency Option Prices // Journal of Econometrics, 2000. V. 94. Pp. 239—276.
3. Bollerslev T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity // Journal of Econometrics. 1986. V. 31. No. 3. Pp. 307 – 327.
4. Calvet L., Fisher A. How to Forecast Long-Run Volatility: Regime Switching and the Estimation of Multifractal Processes // Journal of Financial Econometrics, 2004, No. 2. Pp. 49–83.
5. Calvet L., Fisher A., Mandelbrot B. Deviations and the Distribution of Price Changes // Cowles Foundation Discussion Papers. – Yale University. 1997. No. 1165. Pp. 1 – 28.
6. Calvet L., Fisher A. Forecasting Multifractal Volatility // Journal of Econometrics, 2001. V. 105. Pp. 27 – 58.
7. Hamilton J. Analysis of Time Series Subject to Change in Regime // Journal of Econometrics, 1990. V. 45. Pp. 39 – 70.
8. Klaassen F. Improving GARCH Volatility Forecasts with Regime Switching GARCH // Empirical Economics, 2002. V. 27. Pp. 363-394.
9. Nelder J.A., Mead R. A Simplex Method for Function Minimization // Comput. J. 1965. No. 7. Pp. 308 – 313.