

Логвенков С.А. Мышкис П.А. Самовол В.С.

**СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ.
ФУНКЦИЯ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.**

**Учебное пособие для факультетов менеджмента, политологии и
социологии.**

Москва

Издательство МЦНМО

2010

Логвенков С.А. Мышкис П.А. Самовол В.С.

Сборник задач по математическому анализу. Функция одной переменной. Учебное пособие для факультетов менеджмента, политологии и социологии. – М.: МЦНМО, 2010. ??? с.

ISBN ????????

Сборник задач составлен в соответствии с программой по математическому анализу для подготовки студентов, обучающихся по специальности менеджмент, социология, политология. Содержит задачи по следующим разделам: предел последовательности, предел функции, производная функции, формула Тейлора, исследование функций и построение их графиков, интегрирование, обыкновенные дифференциальные уравнения.

ISBN ????????

© Коллектив авторов

© Издательство НЦНМО, 2010

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	4
1. Предел последовательности	5
2. Предел функции	9
3. Производная функции	15
4. Формула Тейлора	24
5. Исследование функций и построение их графиков	30
6. Интеграл	35
7. Обыкновенные дифференциальные уравнения.	46
Ответы	53

Предисловие

Настоящий сборник задач посвящен одному из основных разделов высшей математики: основам дифференциального и интегрального исчисления функций одной переменной. Он составлен в соответствии с программами курса «Алгебра и анализ», читаемого на различных факультетах Государственного университета - Высшей школы экономики (ГУ-ВШЭ). Изложение материала в предлагаемом сборнике ориентировано на углубленное изучение фундаментальных математических идей и методов, широко применяемых в исследовании социально-экономических процессов и явлений.

Для облегчения восприятия и удобства пользования весь материал разбит на части. При этом основное внимание сосредоточено на таких темах, как пределы последовательностей и функций, производные и их применение, исследование функций и построение их графиков, неопределенный и определенный интеграл, методы решения простейших дифференциальных уравнений.

Большая часть задач снабжена ответами.

При подборе примеров и задач привлекались разнообразные источники и, прежде всего, те книги, которые вошли в приведенный в конце сборника библиографический список.

1. Предел последовательности.

Вычислите пределы

$$1.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+3n)^3 - 27n^3}{(1+4n)^2 + 2n^2}$$

$$1.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-2n)^2}{(n-3)^3 - (n+3)^3}$$

$$1.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^2 - 3n + 1}{3n^2 + n - 5} \right)^2$$

$$1.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8n^5 - 3n^2 + 9}{2n^5 + 2n^3 + 5} \right)^3$$

$$1.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8n^3 + 3n^2 + 5n + 1}}{n + 7}$$

$$1.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{4n^2 + 1} + n \right)^2}{\sqrt[3]{n^6 + 3}}$$

$$1.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt[3]{3n^2} + \sqrt[4]{4n^8 + 1}}{(n + \sqrt{n})\sqrt{7 - n} + n^2}$$

$$1.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n} - \sqrt[3]{27n^6 + n^4}}{(n + \sqrt[4]{n})\sqrt{4 + n^2}}$$

$$1.9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 2^n - 3 \cdot 5^{n+1}}{100 \cdot 2^n + 2 \cdot 5^n}$$

$$1.10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n 6^n - 5^{n+1}}{5^n - (-1)^{n+1} 6^{n+1}}$$

$$1.11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^{50}}{(2n-1)^{48} (n+2)^2}$$

$$1.12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)^{98} (2n-1)^2}{(2n+4)^{100}}$$

$$1.13. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^6 (9n-4)^4}{(3n-3)^{10}}$$

$$1.14. \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{3n^2+2n+1}{n^2-n+2}}$$

$$1.15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(3n^2 + 2n + 1)}{n^2 + 3}$$

$$1.16. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n^2}$$

$$1.17. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2+5}$$

$$1.18. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}}$$

$$1.19. \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{5 + 4n^2} - 2n)$$

$$1.20. \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{1 + n + 9n^2} - \sqrt{2 + n + 9n^2})$$

$$1.21. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{1 + 5n + n^2} - \sqrt{3 + n + n^2})$$

$$1.22. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2 - 3n + 2n^2} - \sqrt{7 + 5n + 2n^2})$$

$$1.23. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2 + 2n - 7} - n}{4n + 3}$$

$$1.24. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 - 7n + 3} - n}{3n - 4}$$

$$1.25. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n + 1}{3n + 1} \right)^n$$

$$1.26. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 + n + 1}{5n^2 + 3n + 2} \right)^{n^2 + 1}$$

$$1.27. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n + 3}{n - 2} \right)^n$$

$$1.28. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{2n+3} \right)^{n+2}$$

$$1.29. \lim_{n \rightarrow \infty} (n+2)(\ln(2n+4) - \ln(2n+3))$$

$$1.30. \lim_{n \rightarrow \infty} (n+3)(\ln(3n+7) - \ln(3n+5))$$

$$1.31. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + n + 3}{n^2 + 2n - 1} \right)^{3n+1}$$

$$1.32. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 2n + 5}{2n^2 + n + 1} \right)^n$$

2. Предел функции.

2.1. Вычислите пределы

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4}{x^2 + x - 3}$

б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x + 2}{x^2 - 1}$

в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 + x - 3}$

г) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 + 5x^2 + 6x}$

д) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x^2 + 7x + 5}{x^2 - x - 2}$

е) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 - 3x - 2}$

ж) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - x^2}{\sqrt{3x} - 3}$

з) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

и) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 4}{3x^2 - 2}$

$$\kappa) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + x + 3}{x^3 - 1}$$

$$\lambda) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 2x + 1}{x^2 - 3}$$

$$\mu) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$$

$$\eta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$$

$$\omicron) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4x} - x)$$

$$\pi) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 4x} - x)$$

$$\rho) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 1} - \sqrt{x^2 - 3x - 4})$$

$$\varsigma) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2 - 3x + 1})$$

$$\tau) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{19x}$$

$$\upsilon) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x^2)}{7x^2 + x}$$

$$\phi) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$$

$$x) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(4x)}{x^2 + x^3}$$

$$\psi) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{2x+1} \right)^x$$

$$\chi) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x+1} \right)^{6x+5}$$

2.2. Найдите порядок малости функций при $x \rightarrow 0$

a) $f(x) = x \sin(5x)$

б) $f(x) = \sin^2(5x) \ln(1 + 3x)$

в) $f(x) = \left(\sqrt[3]{1+2x} - 1 \right)^4 \cos(\pi x)$

г) $f(x) = \frac{x^5}{1+x^7} \operatorname{arctg}(x)$

д) $f(x) = (e^x - 1) \ln(\cos x)$

е) $f(x) = (3^x - 1) \ln(1 + \sin(5x))$

ж) $f(x) = (e^{x^2} - 1) \ln(1 + e^x)$

2.3. Вычислите пределы, используя замены функций на эквивалентные

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin(2x))}{\sin(3x)}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{e^{2x^2} - 1}$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{3x}$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9 + x} - 3}{3 \operatorname{arctg}(x)}$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(3x)}{\sqrt{1 - 3x^2} - 1}$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos(x)} - 1}{\sin^2(x)}$$

$$\text{ж) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(x))}{\sin^2(2x)}$$

$$\text{з) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(2x)}{\sqrt{\cos(5x)} - 1}$$

$$\text{и) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2+1} - e}{\ln(\cos(2x))}$$

$$\kappa) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1 + \sin(2x))}{\sqrt{1 - 6x^2} - 1}$$

$$\lambda) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[5]{x} - 1}{e^{x-1} - 1}$$

$$\mu) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(3x - 8)}{\sqrt{x - 2} - 1}$$

$$\eta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{\ln(x)}$$

$$\omicron) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - x - 1} - 1}{\ln(x - 1)}$$

$$\pi) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x - 4}{3x + 2} \right)^{\frac{x+1}{3}}$$

$$\rho) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 3}{x - 2} \right)^{2x+1}$$

$$\varsigma) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos(x)}{\cos(2x)} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$\tau) \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sin(x)}{\sin(3)} \right)^{\frac{1}{x-3}}$$

$$\text{y) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x))^{\frac{1}{\sin^2(2x)}}$$

$$\text{ф) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin^2(x))^{\frac{1}{\ln(\cos(x))}}$$

$$\text{x) } \lim_{x \rightarrow 0} (2 - \cos(x))^{\frac{1}{\ln(1+2x^2)}}$$

$$\text{ц) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin(2x))^{\frac{1}{\sqrt{1-6x}-1}}$$

$$\text{ч) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 5}{n^2 + 7} \right)^{f\left(\frac{1}{n}\right)}, \text{ если } f(x) \sim \frac{5}{x^2} \text{ при } x \rightarrow 0$$

$$\text{ш) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4 + 2x^2}{4 - x^2} \right)^{f\left(\frac{1}{x}\right)}, \text{ если } f(x) \sim 4x^2 \text{ при } x \rightarrow \infty$$

3. Производная функции.

3.1. Используя только определение производной, действия с ней и табличные производные, найдите $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}$.

3.2. Используя только определение производной, действия с ней и табличные производные, найдите $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos a - \cos x}{x - a}$.

3.3. Используя только определение производной, действия с ней и табличные производные, найдите $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3^{2+\Delta x} - 9}{\Delta x}$.

3.4. Используя только определение производной, действия с ней и табличные производные, найдите $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^x - 2}{x - 1}$.

3.5. Используя только определение производной, действия с ней и табличные производные, найдите $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{f(\operatorname{tg} x) - f(1)}{x - \pi/4}$, если $f(\pi/4) = 2$, $f(1) = 3$, $f'(\pi/4) = 4$, $f'(1) = 5$.

3.6. Используя только определение производной, действия с ней и табличные производные, найдите $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{f(x) \operatorname{tg} x - f(\pi/4)}{4x - \pi}$, если $f(\pi/4) = 2$, $f(1) = 3$, $f'(\pi/4) = 4$, $f'(1) = 5$.

Найдите производные следующих функций

3.7. $y = \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2x^2} + \frac{4}{5\sqrt{x}}$

3.8. $y = 2x^3 \ln x$

$$3.9. y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

$$3.10. y = \frac{2x^2 - 5x + 6}{3x^4 + x + 1}$$

$$3.11. y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$$

$$3.12. y = \frac{x \ln x - 5 \cos x + 1}{2x^3 + 1}$$

$$3.13. y = \sqrt{1 + x^2}$$

$$3.14. y = (3 + 2x^4 - 5x^3)^4$$

$$3.15. y = \sqrt[3]{2x^3 + x + 3}$$

$$3.16. y = \ln(x^2 + 3x - \sqrt{x})$$

$$3.17. y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$$

$$3.18. y = \sin^2(3x)$$

$$3.19. y = e^{x \ln(3x+1)}$$

$$3.20. y = \sqrt{\frac{1 - x^2}{1 + x^2}}$$

$$3.21. y = \ln^2(1 + \cos(2x))$$

$$3.22. y = \sqrt{\ln(x^2 + \cos x)}$$

$$3.23. y = \cos(4x^2 \ln x)$$

$$3.24. y = e^{\sqrt{(x^2+x)\sin(x)}}$$

$$3.25. y = e^{x^2} \sqrt{x^3 + 4x^2 - 7}$$

$$3.26. y = \frac{3}{5(2 - \sin x)^3}$$

$$3.27. y = \frac{1 - \cos(4x)}{1 + \cos(4x)}$$

$$3.28. y = \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$3.29. y = \frac{x \operatorname{arctg}(x)}{1 + x^2}$$

$$3.30. y = \ln \sqrt{\frac{x}{1+x}}$$

$$3.31. y = \frac{e^{-x^2}}{1 + \sqrt{x}}$$

3.32. $y = \ln \sqrt{\frac{e^{3x}}{e^{3x} + 1}}$

3.33. $y = x^2 \arcsin \sqrt{1 - x^2}$

3.34. $y = (x^2 + 1)^x$

3.35. $y = (x + 1)^{\operatorname{tg}(x)}$

3.36. $y = (3x^2 + 3x - 2)^{\operatorname{atctg}(x)}$

3.37. $y = e^{x^2} (\cos x)^{\sqrt{x}}$

3.38. $y = x^2 (\operatorname{tg} x)^{3x-2}$

3.39. Известно, что $g(a) = b$, $h(a) = c$ и $f(x) = g(h(x))$. Чему равно значение $f(a)$?

3.40. Известно, что $g(b) = c$, $h(a) = b$ и $f(x) = g(h(x))$. Чему равно значение $f(a)$?

3.41. Известно, что $g'(a) = \alpha$, $h'(a) = \beta$ и $f(x) = g(h(x))$. Чему равно значение $f'(a)$?

3.42. Известно, что $g'(b) = \alpha$, $h'(a) = \beta$, $h(a) = b$ и $f(x) = g(h(x))$. Чему равно значение $f'(a)$?

3.43. Найдите $g'(1)$, если $g(x) = f(f(f(x)))$, где $f(x) = x^6 - x + 1$.

3.44. Найдите $g'(1)$, если $g(x) = f(f(f(x)))$, где $f(x) = x^3 + 1$.

3.45. Вычислите дробь $\frac{h'(x)}{g'(3^x)}$, если $h(x) = g(3^x)$.

3.46. Вычислите дробь $\frac{h'(x)}{g'(x)}$, если $g(x) = \ln h(x)$.

3.47. Найдите при $x = 2$ значение сложной функции $f(x) = g(h(x))$ и ее производной, если $g(1) = 2$, $h(1) = 1$, $g'(x) = \pi x^{\pi-1}$ и $h'(x) = 3x^2$.

3.48. Найдите $f''(1)$, если $f(x) = g(h(x))$ и $h(1) = 2$, $h'(2) = 3$, $h'(1) = 4$, $g(1) = 3$, $g(2) = 10$, $g'(5) = 3$, $g'(3) = 4$, $g'(2) = 2$, $h''(1) = 5$, $g''(5) = 4$, $g''(2) = -1$.

3.49. Найдите $h^{(7)}(x)$, если $h^{(5)}(x) = 4^{-\sin x}$.

3.50. Зависимость y от x задана параметрически ($x = x(t)$ и $y = y(t)$),

причем $\frac{d^{10}y}{dx^{10}} = \frac{e^t}{t}$ и $\frac{dx}{dt} = \frac{e^t}{t^3}$. Найдите $\frac{d^{11}y}{dx^{11}}$ при $t = 2$.

3.51. Зависимость y от x задана параметрически ($x = x(t)$ и $y = y(t)$),

причем $\frac{d^7y}{dx^7} = \sin^{10} t$ и $\frac{dx}{dt} = \sin^9 t$. Найдите $\frac{d^8y}{dx^8}$ при $t = \frac{\pi}{3}$.

Напишите уравнения касательных к графикам следующих функций, заданных параметрически, в точке, соответствующей $t = t_0$

3.52. $y = 2t^2 - 3t + 1$, $x = -t^2 + 2t + 4$, $t_0 = 2$

3.53. $y = 2t^2 + 4t - 10$, $x = 4t^2 - 12t + 7$, $t_0 = 2$

3.54. $y = -t^2 + 5t + 3$, $x = 2t^2 - 3t$, $t_0 = -1$

3.55. $y = 5t^2 - 2t - 5$, $x = t^2 + 4t - 1$, $t_0 = -1$

3.56. Найдите значение производной y' функции $y = y(x)$, заданной неявно уравнением $e^x + \sqrt{x + y} = y + 1$, в точке $M(0; 1)$.

3.57. Найдите значение производной y' функции $y = y(x)$, заданной неявно уравнением $\ln(x + y^2) + \arctg(x) = 0$, в точке $M(0; 1)$.

3.58. Найдите значение производной y' функции $y = y(x)$, заданной неявно уравнением $\sqrt{xy} + \ln(y) = x^5$, в точке $M(1; 1)$.

3.59. Найдите значение производной y' функции $y = y(x)$, заданной неявно уравнением $e^{y^2-1} + x^2(y + 0,5) = 7$, в точке $M(2; 1)$.

3.60. Напишите уравнение касательной, проведенной в точке $(1;1)$ к графику функции $y = y(x)$, заданной неявно $xy + \ln y = 1$.

3.61. Напишите уравнение касательной, проведенной в точке $(2;1)$ к графику функции $y = y(x)$, заданной неявно $x^2 + 2xy - y^2 = 7$.

3.62. Напишите уравнение касательной, проведенной в точке $(1;1)$ к графику функции $y = y(x)$, заданной неявно $x^2 + xy + y^2 = 3$.

3.63. Напишите уравнение нормали, проведенной в точке $M(2;1)$ к графику функции $y = y(x)$, заданной неявно

$$y^{2x} + 3xy^2 - 2x - 12y + 9 = 0.$$

3.64. Напишите уравнение нормали, проведенной в точке $M(1;2)$ к графику функции $y = y(x)$, заданной неявно

$$x^{y-1} - 2x^2y^3 + 3x + 20y - 28 = 0.$$

3.65. Напишите уравнение нормали, проведенной в точке $M(1;1)$ к графику функции $y = y(x)$, заданной неявно

$$x^{1+\ln y} + 4x^2y^3 + 3x + 12y - 20 = 0.$$

3.66. Напишите уравнение нормали, проведенной в точке $M(2;1)$ к графику функции $y = y(x)$, заданной неявно

$$y^{x-y} + 5xy^3 - 7x - 21y + 24 = 0.$$

3.67. К графику функции $y = 0,5(x-2)^6$ в точке $M(3; 0,5)$ проведена касательная. На касательной взяты точки A и B с разностью проекций на ось Ox равной 5. Найдите разность их проекций на ось Oy .

3.68. В условиях предыдущей задачи найдите квадрат расстояния между точками A и B .

3.69. Прямая l получена зеркальным отражением касательной из предыдущей задачи относительно прямой $y = x$. Найдите квадрат расстояния между точками A и B , находящимися на прямой l , если разность их проекций на ось Ox равна 6.

3.70. Зависимость $y = f(x)$ задана неявно уравнением

$$x \cdot g(y) + y \cdot h(x) - 15 = 0. \text{ Найдите параметр } b \text{ в уравнении } y = kx + b \text{ касательной к графику } y = f(x) \text{ в точке } A(2;3), \text{ если } g(3) = -3, g'(3) = -4, h(2) = 7, h'(2) = 2.$$

3.71. Зависимость $y = f(x)$ задана неявно уравнением $x \cdot g(y) + y \cdot h(x) + 28 = 0$. Найдите параметр b в уравнении $y = kx + b$ касательной к графику $y = f(x)$ в точке $A(3;2)$, если $g(2) = -6$, $g'(2) = 2$, $h(3) = -5$, $h'(3) = 4$.

3.72. Найдите $\lim_{x \rightarrow \infty} E_x(y)$, если $y = \frac{x^5 + 3}{x^2 + x}$. Напомним, что эластичность $E_x(y) = \frac{dy}{y} : \frac{dx}{x} = \frac{y' \cdot x}{y}$. Проверьте ответ, найдя эластичность функции $z = x^n$, эквивалентной y при $x \rightarrow \infty$.

3.73. Найдите $\lim_{x \rightarrow 0} E_x(y)$, если $y = \frac{x^5 + 3}{x^2 + x}$. Проверьте ответ, найдя эластичность функции $z = x^n$, эквивалентной y при $x \rightarrow 0$.

3.74. Заменяя приращение функции дифференциалом, найдите приближенно значение x , если $g(-5) = -3$, $g(x) = -2,96$ и $g'(-5) = 2$.

3.74. Заменяя приращение функции дифференциалом, найдите приближенно значение x , если $g(5) = 2$, $g(x) = 2,04$ и $g'(5) = -4$.

3.76. Заменяя приращение функции дифференциалом, найдите приближенно значение x , если $g(-5) = 2$, $g(x) = 2,04$ и $g'(-5) = -4$.

3.77. Заменяя приращение функции дифференциалом, найдите приближенно значение x , если $g(-3) = 5$, $g(x) = 5,04$ и $g'(-3) = -2$.

Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно значение функции $y = f(x)$ в точке $x = a$

3.78. $f(x) = x^5$, $a = 2,001$

3.79. $f(x) = \sqrt{4x - 3}$, $a = 0,98$

3.80. $f(x) = \sqrt{x^3}$, $a = 1,02$

3.81. $f(x) = e^{x^2-x}$, $a = 1,2$

Используя понятие дифференциала функции, вычислите приближенно

3.82. $(1,015)^5$

3.83. $\sqrt[4]{80,5}$

3.84. $\arctg(1,04)$

3.85. На сколько изменится начальный вклад, составляющий 980 рублей, за 3 года, если годовая процентная ставка составляет 0,1 %.

4. Формула Тейлора.

4.1. Разложите функцию $f(x) = \frac{1}{x-2}$ по целым неотрицательным степеням двучлена $x-1$ до члена четвертого порядка (включительно).

4.2. Найдите три члена разложения функции $f(x) = \sqrt{x}$ по целым неотрицательным степеням разности $x-1$.

4.3. Функцию $f(x) = e^{2x-x^2}$ в окрестности точки $x=0$ приближенно замените многочленом третьей степени.

4.4. Функцию $f(x) = e^{\sin(x)}$ в окрестности точки $x=0$ приближенно замените многочленом третьей степени.

4.5. Напишите разложение многочлена четвертой степени $P(x)$ по степеням $x-10$, используя формулу Тейлора. Найдите $P''(10)$, если $P(10) = 4$, $P'(10) = 1$, $P'''(10) = 18$, $P^{(4)}(10) = 48$ и $P(11) = 11$.

4.6. Напишите разложение многочлена четвертой степени $P(x)$ по степеням $x-11$, используя формулу Тейлора. Найдите $P'''(11)$, если $P(11) = 5$, $P'(11) = 4$, $P''(11) = 6$, $P^{(4)}(11) = 72$ и $P(10) = 5$.

Используя правило Лопиталя, вычислите пределы

4.7.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 2x)}{\sin 2x}$$

4.8.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$$

$$4.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\arcsin 2x}$$

$$4.10. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt[3]{2x} - 2}$$

$$4.11. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$$

$$4.12. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5}{e^{x/100}}$$

$$4.13. \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$$

$$4.14. \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x \ln(1 - x)$$

Используя стандартные разложения элементарных функций по формуле Маклорена, вычислите пределы

$$4.15. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$$

$$4.16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$$

$$4.17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$$

4.18. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 + x^2} \cos x}{x^4}$

4.19. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1 + x)}{x^3}$

4.20. Используя разложения по формуле Тейлора для элементарных функций, найдите приближенное значение $f(0,5)$, где $f(x) = 3 \sin(x) - \sin(3x)$, ограничившись в разложении первым отличным от нуля членом.

4.21. Используя разложение по формуле Тейлора для элементарных функций, найдите приближенное значение $f(0,3)$, где $f(x) = 2 \cos(2x) - 2 \cos(x)$, ограничившись в разложении первым отличным от нуля членом.

4.22. Ограничившись тремя отличными от нуля членами табличного разложения соответствующей элементарной функции по формуле Маклорена, найдите приближенное значение $f(0,5)$, где $f(x) = 3 \cos(2x) - 3 + 6x^2$.

4.23. Используя разложение по формуле Тейлора для элементарных функций, найдите приближенное значение $f(0,5)$, где $f(x) = \sqrt{1 - 2x^2} + x^2 - 1$, ограничившись в разложении первым отличным от нуля членом.

4.24. Ограничившись тремя отличными от нуля членами табличного разложения соответствующей элементарной функции по формуле Маклорена, найдите приближенное значение $f(0,5)$, где $f(x) = 2\sqrt{1 + x^2} - 2 - x^2$.

4.25. Используя разложение по формуле Тейлора для элементарных функций, найдите приближенное значение $f(0,2)$, где

$f(x) = \sqrt[3]{1+3x} - 1 - x$, ограничившись в разложении первым отличным от нуля членом.

4.26. Ограничившись тремя отличными от нуля членами табличного разложения соответствующей элементарной функции по формуле Маклорена, найдите приближенное значение $f(0,4)$, где

$$f(x) = e^{2x} - 1 - 2x.$$

4.27. Ограничившись тремя отличными от нуля членами табличного разложения соответствующей элементарной функции по формуле Маклорена, найдите приближенное значение $f(0,5)$, где

$$f(x) = 6 \ln(1+x^2) - 6x^2 + 3x^4.$$

4.28. Используя формулу Тейлора найдите $f^{(IV)}(0)$, где

$$f(x) = \frac{1}{1-x+x^2} - \cos(x^2).$$

4.29. Используя формулу Тейлора найдите $f^{(IV)}(0)$, где

$$f(x) = \sin^2 x - \frac{x^2}{x^2+1}.$$

4.30. Используя формулу Тейлора найдите $f^{(IV)}(0)$, где

$$f(x) = \ln(1-x+x^2) + x - x^2/2$$

4.31. Используя формулу Тейлора или правило Лопиталья, найдите

значение $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2\Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - 5\Delta x)}{3\Delta x}$, если $f(x)$

дифференцируема в точке $x = x_0$ и $f(x_0) = 3$, $f'(x_0) = 6$

4.32. Используя формулу Тейлора или правило Лопиталья, найдите

значение $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 5\Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - 7\Delta x)}{2\Delta x}$, если $f(x)$

дифференцируема в точке $x = x_0$ и $f(x_0) = 4$, $f'(x_0) = 8$

4.33. Применяя формулу Тейлора для функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 и, сохраняя члены до второго порядка малости включительно относительно Δx , найдите приближенное значение выражения $2f(x_0 + 2\Delta x) - 3f(x_0) + f(x_0 - 4\Delta x)$.

4.34. Применяя формулу Тейлора для функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 и, сохраняя члены до второго порядка малости включительно относительно Δx , найдите приближенное значение выражения $2f(x_0 + 3\Delta x) - 5f(x_0) + 3f(x_0 - 2\Delta x)$.

4.35. Применяя формулу Тейлора для функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 и, сохраняя члены до второго порядка малости включительно относительно Δx , найдите приближенное значение выражения $f(x_0 + 4\Delta x) - 3f(x_0) + 2f(x_0 - 2\Delta x)$.

4.36. Применяя формулу Тейлора для функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 и, сохраняя члены до второго порядка малости включительно относительно Δx , найдите приближенное значение выражения $4f(x_0 + 3\Delta x) - 7f(x_0) + 3f(x_0 - 4\Delta x)$.

4.37. Используя стандартное разложение функции $\ln(1+t)$ по формуле Маклорена по степеням $t = \frac{1}{x}$, найдите наклонные асимптоты

функции $f(x) = x^3 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - x^2$.

4.38. Используя стандартное разложение функции, e^t по формуле Маклорена по степеням $t = \frac{1}{x}$, найдите наклонные асимптоты

функции $f(x) = x^2 \left(e^{\frac{2x+1}{x}} - e^2 \right)$.

4.39. Используя стандартное разложение функции $(1+t)^\alpha$ по формуле Маклорена по степеням $t = \frac{1}{x}$, найдите наклонные асимптоты функции $f(x) = \sqrt[10]{x^{20} + 10x^{19}} - x^2$.

5. Исследование функций и построение их графиков.

5.1. Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями функции $f(x) = x^3 - 12x + 7$ на отрезке $[0; 3]$.

5.2. Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями функции $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 2$ на отрезке $[-3; 1]$.

5.3. Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями функции $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 6$ на отрезке $[0; 2]$.

5.4. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = x^2 + 4|x - 1| - 4$ на отрезке $[-1; 2]$.

5.5. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = x^2 + 6|x - 2| - 12$ на отрезке $[-1; 3]$.

5.6. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = x^2 + 8|x - 3| - 24$ на отрезке $[-1; 4]$.

5.7. Найдите точку минимума функции $f(x^3 - 9x^2 + 24x + 10)$, если $f(x)$ – монотонно убывающая функция.

5.8. Найдите точку максимума функции $f(5 + 45x - 3x^2 - x^3)$, если $f(x)$ – монотонно убывающая функция.

5.9. Функция $f(x)$ определена и имеет непрерывную вторую производную при всех $x \in (-\infty; +\infty)$. График функции $y = f(x)$ имеет асимптоту $y = 1 - x$ при $x \rightarrow -\infty$ и $y = 2x + 1$ при $x \rightarrow +\infty$. Кроме того,

$(x-2) \cdot f''(x) < 0$ при всех $x \neq 2$. Изобразите эскиз графика $y = f(x)$ и оцените возможные значения $f(2)$.

5.10. Функция $f(x)$ определена и имеет непрерывную вторую производную при всех $x \in (-\infty; +\infty)$. График функции $y = f(x)$ имеет асимптоту $y = x + 3$ при $x \rightarrow -\infty$ и $y = 2x - 2$ при $x \rightarrow +\infty$. Кроме того, $(x+1) \cdot f''(x) > 0$ при всех $x \neq -1$. Изобразите эскиз графика $y = f(x)$ и оцените возможные значения $f(-1)$.

5.11. Найдите сумму ординат всех точек пересечения асимптот графика $y = \frac{2x^3 - 3x^2}{x^2 - 3x + 2}$.

5.12. Найдите сумму ординат всех точек пересечения асимптот графика $y = \frac{3x^2 - 2x^3}{x^2 + 2x - 8}$.

Проведя необходимое исследование, постройте графики следующих функций

5.13. $y = \frac{x}{x^2 + 1}$

5.14. $y = \frac{5}{x^6} - \frac{6}{x^5}$

5.15. $y = \frac{4x^2 + 3x}{2x + 2}$

5.16. $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$

5.17. $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$

$$5.18. y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$$

$$5.19. y = \frac{x^3}{(x - 2)^2}$$

$$5.20. y = \frac{27 - 2x^3}{6x^2}$$

$$5.21. y = \frac{x^2}{(x + 4)^2}$$

$$5.22. y = \frac{2x^2 + 3x - 5}{x - 4}$$

$$5.23. y = \frac{x^2 - 3x - 18}{x - 9}$$

$$5.24. y = \frac{x^4}{(x + 1)^3}$$

$$5.25. y = \frac{x^3 - x^2}{(x + 1)^2}$$

$$5.26. y = \frac{(x + 1)^3}{(x - 1)^2}$$

$$5.27. y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$$

$$5.28. y = e^{2x-x^2}$$

$$5.29. y = xe^{-x}$$

$$5.30. y = \frac{e^x}{x+1}$$

$$5.31. y = (x+1)e^{\frac{1}{x}}$$

$$5.32. y = (x-2)e^{\frac{9}{x}}$$

$$5.33. y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$$

$$5.34. y = xe^{-x^2}$$

$$5.35. y = x^2 e^{-x^2}$$

$$5.36. y = x \ln x$$

$$5.37. y = x^2 \ln x$$

$$5.38. y = \frac{\ln x}{x}$$

5.39. $y = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$

5.40. $y = x + \operatorname{arctg}(x)$

5.41. $y = x - \operatorname{arctg}(2x)$

6. Интеграл.

6.1. Вычислив производную $(\cos x^5)'$, найдите $\int x^4 \sin x^5 dx$.

6.2. Вычислив производную $(\ln(1 - x^4))'$, найдите $\int \frac{x^3}{1 - x^4} dx$.

Найдите следующие неопределенные интегралы

6.3. $\int \left(x^4 + 3\sqrt[5]{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx$

6.4. $\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{4-x^2}} \right) dx$

6.5. $\int \frac{5x^8 + 1}{x^4} dx$

6.6. $\int \frac{3x^4 + 3x^2 + 1}{x^2 + 1} dx$

6.7. $\int \sqrt[3]{3 - 7x} dx$

6.8. $\int \frac{6x - 1}{\sqrt{1 - 3x}} dx$

6.9. $\int \frac{2x + 3}{2x + 1} dx$

$$6.10. \int \frac{1-3x}{3+2x} dx$$

$$6.11. \int \frac{3\operatorname{arctg}^2 x}{x^2+1} dx$$

$$6.12. \int \frac{3\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} dx$$

$$6.13. \int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx$$

$$6.14. \int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$$

$$6.15. \int x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx$$

$$6.16. \int x^2 \sqrt[5]{x^3-8} dx$$

$$6.17. \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$$

$$6.18. \int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx$$

$$6.19. \int \sqrt{3+\cos(5x)} \sin(5x) dx$$

$$6.20. \int \frac{x^2+1}{(x^3+3x+1)^4} dx$$

$$6.21. \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx$$

$$6.22. \int \frac{3\sqrt{x}+1}{2x\sqrt{x}+x} dx$$

$$6.23. \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$6.24. \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$6.25. \int \frac{dx}{\sqrt{7-5x^2}}$$

$$6.26. \int \frac{x dx}{2x^2+3}$$

$$6.27. \int \frac{2\arcsin x + x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$6.28. \int e^{-(x^2+1)} x dx$$

$$6.29. \int \sin(\ln x) \frac{dx}{x}$$

$$6.30. \int \frac{dx}{x^2+4x+5}$$

$$6.31. \int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$$

$$6.32. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+8}}$$

$$6.33. \int x \sin(3x) dx$$

$$6.34. \int x^2 \sin x \, dx$$

$$6.35. \int (x^2 + 2x + 3) \cos x \, dx$$

$$6.36. \int (x+1)e^{-x} dx$$

$$6.37. \int (x+1) \cos 3x \, dx$$

$$6.38. \int (6x+3) \cos(2x) dx$$

$$6.39. \int (2x+2)e^{2x} dx$$

$$6.40. \int x^2 e^{-x} \, dx$$

$$6.41. \int x^2 \cos x \, dx$$

$$6.42. \int (4x^3 + 6x - 7) \ln x \, dx$$

6.43. $\int x \ln(3x + 2) dx$

6.44. $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$

6.45. $\int x \operatorname{arctg} x dx$

6.46. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$

6.47. Найдите первообразную функции $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}$, проходящую через точку $(1/\sqrt{2}, -1)$. Используйте замену переменной $\frac{1}{x^2} - 1 = t^2$.

6.48. Найдите первообразную функции $f(x) = \frac{1}{x^3 \cdot \sqrt[3]{2-x^3}}$, проходящую через точку $(1, 1)$. Используйте замену переменной $\frac{2}{x^3} - 1 = t^3$.

6.49. Найдите первообразную функции $f(x) = \frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{1+x^2}}$, проходящую через точку $(1, 0)$. Используйте замену переменной $\frac{1}{x^2} + 1 = t^2$.

6.50. Найдите первообразную функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$, проходящую через точку $(1, 0)$. Используйте замену переменной $\frac{4}{x^2} + 1 = t^3$.

6.51. Известно, что $\int \frac{\pi^{3/2} \cos x}{x^2 + \pi^2} dx = F(x) + C$ и $g(x) = F(x^2)$. Найти $g'(\sqrt{\pi})$.

6.52. Известно, что $\int \frac{5^x}{x^2 + 9} dx = F(x) + C$ и $g(x) = F(x^2)$. Найти $g'(2)$.

6.53. Найдите неопределенный интеграл $\int \frac{f(x)}{x^2 + x - 6} dx$, если

$\int \frac{f(x)}{x - a} dx = F(x; a) + C$, где $F(x; a)$ – заданная функция переменных x и a ,
 $C = const$.

6.54. Найдите неопределенный интеграл $\int \frac{x \cdot f(x)}{x^2 + x - 6} dx$, если

$\int \frac{f(x)}{x - a} dx = F(x; a) + C$, где $F(x; a)$ – заданная функция переменных x и a ,
 $C = const$.

6.55. Если $f(x)$ непрерывна на $[0; 15]$ и $F'(x) = f(x)$, то чему равен

определенный интеграл $\int_3^7 f(2x + 1) dx$.

6.56. Если $f(x)$ непрерывна на $[0; 11]$ и $F'(x) = f(x)$, то чему равен

определенный интеграл $\int_2^4 f(3x - 2) dx$.

6.57. Если $f(x)$ непрерывна на $[-1; 19]$ и $F'(x) = f(x)$, то чему равен

определенный интеграл $\int_1^3 f(4x + 2) dx$.

6.58. Если $f(x)$ непрерывна на $[-1; 19]$ и $F'(x) = f(x)$, то чему равен

определенный интеграл $\int_2^5 f(3x - 4) dx$.

Вычислите следующие определенные интегралы

$$6.59. \int_1^3 x^3 dx$$

$$6.60. \int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4} \right) dx$$

$$6.61. \int_0^1 \sqrt{1+x} dx$$

$$6.62. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$6.63. \int_1^2 \frac{x dx}{1+x^2}$$

$$6.64. \int_0^{\ln 3} \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x + 1}}$$

$$6.65. \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$$

$$6.66. \int_{-2}^1 x^2 \sqrt{1-x^3} dx$$

$$6.67. \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{5-4x}}$$

$$6.68. \int_4^5 x \sqrt{x^2-16} dx$$

$$6.69. \int_0^1 x(2-x^2)^5 dx$$

$$6.70. \int_3^4 \frac{xdx}{\sqrt{25-x^2}}$$

$$6.71. \int_0^4 \frac{dx}{(1+\sqrt{2x+1})\sqrt{2x+1}}$$

$$6.72. \int_1^{\sqrt[7]{2}} \frac{x^6 dx}{1+(x^7-1)^2}$$

6.73. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, если

$$S_n = \frac{1}{n} \left(f' \left(\frac{5n+1}{n} \right) + f' \left(\frac{5n+2}{n} \right) + f' \left(\frac{5n+3}{n} \right) + \dots + f' \left(\frac{6n}{n} \right) \right),$$
 а функция

$f(x)$ имеет непрерывную первую производную и $f(n) = n!$ при $\forall n \in \mathbb{N}$.

6.74. Известно, что $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x \cdot f(\cos 3x) dx = -1$. Найдите $\int_0^1 f(x) dx$.

6.75. Известно, что $G'(x) = x^2 g(x)$. Найдите $\int_0^2 x^3 g'(x) dx$, если $g(0) = 1$, $G(0) = 1$, $g(2) = 2$, $G(2) = 2$.

6.76. Известно, что $G'(x) = \sin x \cdot g(x)$. Найдите $\int_0^\pi \cos x \cdot g'(x) dx$, если $G(0) = 1$, $G(\pi) = 3$.

Вычислите следующие несобственные интегралы или установите их расходимость.

$$6.77. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$$

$$6.78. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$$

$$6.79. \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$6.80. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$$

$$6.81. \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx$$

$$6.82. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$6.83. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}$$

$$6.84. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$6.85. \int_0^1 \frac{dx}{x}$$

$$6.86. \int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$$

$$6.87. \int_0^1 \frac{dx}{x^2}$$

$$6.88. \int_0^1 \frac{dx}{x^p}$$

$$6.89. \int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$6.90. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Исследуйте сходимость следующих несобственных интегралов.

$$6.91. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}$$

$$6.92. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$$

$$6.93. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$$

$$6.94. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x + \sqrt{x} + 1}$$

$$6.95. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4 + x^3 + 1}$$

$$6.96. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x+x+1}}$$

$$6.97. \int_1^{\infty} \frac{\sin x dx}{x^2+1}$$

$$6.98. \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

7. Обыкновенные дифференциальные уравнения

7.1. Найдите общие решения следующих дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными

а) $xy' + y = 0$.

б) $x^2y' + y = 0$.

в) $(x+1)y' + xy = 0$.

г) $(2x+1)y' = 2y$

д) $yy' + x = 0$

е) $xyy' = 1 - x^2$.

ж) $y' \operatorname{ctgx} + y = 2$.

з) $xydy = \sqrt{y^2 + 1} dx$.

и) $x^2y^2y' + 1 = y$.

7.2. Решите задачу Коши

а) $y' = y$, $y(-2) = 4$.

б) $xy' - 2y = 0$, $y(2) = 12$.

в) $y' = \frac{y}{x+1}$, $y(2) = 6$.

г) $(1 + x^2)y' + y = 0$, $y(1) = 1$.

7.3. Найдите решение дифференциального уравнения $\frac{yy'}{x} + e^y = 0$, удовлетворяющее условию $y = 0$ при $x = 1$.

7.4. Найдите решение дифференциального уравнения $y' = -y^2$, удовлетворяющее условию $y = 0$ при $x = 2$.

7.5. Найдите решение дифференциального уравнения $y' + y^2 e^x = 0$, удовлетворяющее условию $y = 1$ при $x = 0$.

7.6. Найдите решение дифференциального уравнения $2y'\sqrt{x} = y$, удовлетворяющее условию $y = 1$ при $x = 4$.

7.7. Найдите решение дифференциального уравнения $x^2 y' + y^2 = 0$, удовлетворяющее условию $y = 1$ при $x = -1$.

7.8. Решите однородные дифференциальные уравнения

а) $xy' = x + 2y$

б) $(x + y)dy + (x - y)dx = 0$

в) $x^2 dy + (y^2 - 2xy)dx = 0$

г) $(xy - x^2)y' = y^2$

д) $(x^2 + y^2)y' = 2xy$

7.9. Решите линейные дифференциальные уравнения

а) $y' - \frac{3y}{x} = x$

б) $y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}$

в) $xy' + y = \ln x + 1$

г) $xy' - 2y = 2x^4$

д) $x^2y' + xy + 1 = 0$

е) $(xy + e^x)dx - xdy = 0$

ж) $x \ln x dy = (2y + \ln x)dx$

7.10. Решите уравнения Бернулли

а) $y'x + y = -xy^2$

б) $y' + 2y = y^2e^x$

в) $y' - xy = -y^3e^{-x^2}$

г) $x^2y' = y^2 + xy$

$$\text{д) } y' + xy = xy^3$$

7.11. Решите задачу Коши

$$\text{а) } x^2 y' = 2xy - 3, \quad y = 1 \text{ при } x = -1$$

$$\text{б) } y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}, \quad y = 1 \text{ при } x = -1$$

$$\text{в) } 3y^2 y' + y^3 = x + 1 \quad y = -1 \text{ при } x = 1$$

Решите следующие системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

$$\text{7.12. } \begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 3x + 4y \end{cases}$$

$$\text{7.13. } \begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = -4x + y \end{cases}$$

$$\text{7.14. } \begin{cases} \dot{x} = -x + 8y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$$

$$\text{7.15. } \begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = -2x + 3y \end{cases}$$

$$\text{7.16. } \begin{cases} \dot{x} = x - 3y \\ \dot{y} = 3x + y \end{cases}$$

$$\text{7.17. } \begin{cases} \dot{x} = -x - 5y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$$

$$7.18. \begin{cases} \dot{x} = x - y + z \\ \dot{y} = x + y - z \text{ (одно из собственных чисел равно 1)} \\ \dot{z} = 2x - y \end{cases}$$

$$7.19. \begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z \\ \dot{y} = -x + y + z \\ \dot{z} = x - z \end{cases}$$

$$7.20. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z \\ \dot{y} = x + 2y - z \text{ (одно из собственных чисел равно 1)} \\ \dot{z} = x - y + 2z \end{cases}$$

$$7.21. \begin{cases} \dot{x} = 3x - y + z \\ \dot{y} = x + y + z \text{ (одно из собственных чисел равно 1)} \\ \dot{z} = 4x - y + 4z \end{cases}$$

Решите следующие линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

$$7.22. y'' + y' - 2y = 0$$

$$7.23. y'' + 4y' + 3y = 0$$

$$7.24. y'' - 2y' = 0$$

$$7.25. 2y'' - 5y' + 2y = 0$$

$$7.26. y'' - 4y' + 5y = 0$$

$$7.27. y'' + 2y' + 10y = 0$$

$$7.28. y'' + 4y = 0$$

$$7.29. y''' - 8y = 0$$

$$7.30. y^{IV} - y = 0$$

Найдите решения уравнений, удовлетворяющие указанным условиям.

$$7.31. y'' - 5y' + 4y = 0, y(0) = 5, y'(0) = 8.$$

$$7.32. y'' + 3y' + 2y = 0, y(0) = 1, y'(0) = -1$$

$$7.33. y'' + 4y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2.$$

$$7.34. y'' + 2y' = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.

1. Болгов В.А., Демидович Б.П., Ефимов А.В. и др. Сборник задач по математике. М.: Наука, 1986.
2. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1997.
3. Зимина О.В., и др. Высшая математика. Решебник. М.: Физико-математическая литература, 2001.
4. Самовол В.С. Основы математического анализа для политологов. Ч. I, Ч. II. Учебное пособие. М.: ГУ-ВШЭ, 2001.
5. Сборник задач по математическому анализу. Т.1-3, Под ред. Л.Д.Кудрявцева, М.:Физматлит, 2003.
6. Сборник задач по высшей математике для экономистов: учебное пособие. Под ред. В.И.Ермакова. М.: ИНФРА-М, 2005.
7. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2000.
8. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике. Учебное пособие для вузов. М.: Высшая школа, 2001.

Ответы.

1.1. $3/2$. 1.2. $-2/3$. 1.3. $25/9$. 1.4. 64 . 1.5. 2 . 1.6. 9 . 1.7. $\sqrt{2}$.
1.8. -3 . 1.9. $-15/2$. 1.10. $1/6$. 1.11. 4 . 1.12. 1 . 1.13. $1/9$. 1.14. 8 .
1.15. 0 . 1.16. 1 . 1.17. $1/2$. 1.18. $4/3$. 1.19. $5/4$. 1.20. $-1/6$. 1.21. 2 .
1.22. $-4/\sqrt{2}$. 1.23. $1/2$. 1.24. $1/3$. 1.25. 0 . 1.26. 0 . 1.27. e^5 .

1.28. e^{-2} . 1.29. $1/2$. 1.30. $2/3$. 1.31. e^{-3} . 1.32. $e^{1/2}$.

2.1. а)-5. 2.1. б) ∞ . 2.1. в) 0 . 2.1. г) $4/3$. 2.1. д) $-4/3$.

2.1. е) $2/3$. 2.1. ж) -12 . 2.1. з) 1 . 2.1. и) $1/3$. 2.1. к) 0 . 2.1. л) ∞ .

2.1. м) 1 . 2.1. н) -1 . 2.1. о) 2 . 2.1. п) $+\infty$. 2.1. р) 3 . 2.1. с) $-3/2$.

2.1. т) $3/19$. 2.1. у) 0 . 2.1. ф) $2/3$. 2.1. х) 8 . 2.1. ц) 0 . 2.1. ч) e^2 .

2.2. а) x^2 . 2.2. б) x^3 . 2.2. в) x^4 . 2.2. г) x^6 . 2.2. д) x^3 . 2.2. е) x^2 .

2.2. ж) x^2 . 2.3. а) $2/3$. 2.3. б) 1 . 2.3. в) $1/6$. 2.3. г) $1/18$. 2.3. д) -6 .

2.3. е) $-1/6$. 2.3. ж) $-1/8$. 2.3. з) $-8/25$. 2.3. и) $-e/2$. 2.3. к) $-4/3$.

2.3. л) $1/5$. 2.3. м) 6 . 2.3. н) 3 . 2.3. о) $3/2$. 2.3. п) $e^{2/3}$. 2.3. р) e^{10} .

2.3. с) $e^{3/2}$. 2.3. т) $e^{ctg(3)}$. 2.3. у) $e^{-1/8}$. 2.3. ф) e^{-2} . 2.3. х) $e^{1/4}$.

2.3. ц) $e^{-2/3}$. 2.3. ч) e^{-10} . 2.3. ш) e^2 .

3.1. $\cos x$. 3.2. $\sin a$. 3.3. $9 \ln 3$. 3.4. $2 \ln 2$. 3.5. $f'(tg \pi/4) \cdot (\cos \pi/4)^{-2} = f'(1) \cdot 2 = 10$. 3.6. $(f'(\pi/4) \cdot tg \pi/4 + f(\pi/4) \cdot (\cos \pi/4)^{-2})/4 = 2$.

3.39. Неизвестно. 3.40. c . 3.41. Неизвестно. 3.42. $\alpha \cdot \beta$. 3.43. 125 .

3.44. $8748 = (3 \cdot 9^2) \cdot (3 \cdot 2^2) \cdot (3 \cdot 1^2)$. 3.45. $3^x \ln 3$. 3.46. $h(x)$. 3.47. $f(2) = 2^{3\pi}$

$+ 1$; $f'(2) = 3\pi 2^{3\pi-1}$. Указание. Найдите, сначала, функции $g(x)$ и $h(x)$

отдельно. 3.48. -6 . 3.49. $4^{-\sin x} (\ln^2 4 \cos^2 x + \ln 4 \sin x)$. 3.50. $2 (t^2 - t$

при $t = 2$). 3.51. $5 (10 \cos t$ при $t = \frac{\pi}{3}$).

- 3.52.** $y = -2.5x + 13$. **3.53.** $y = 3x + 9$. **3.54.** $y = -x + 2$.
3.55. $y = -6x - 22$. **3.56.** 3. **3.57.** -1. **3.58.** 3. **3.59.** -1.
3.60. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. **3.61.** $y = -3x + 7$. **3.62.** $y = -x + 2$.
3.63. $y = 4x - 7$. **3.64.** $y = \frac{1}{7}x + \frac{13}{7}$. **3.65.** $y = 2x - 1$.
3.66. $y = -5x + 11$. **3.67.** $y_B - y_A = k \cdot (x_B - x_A) = 3 \cdot 5 = 15$. **3.68.** 250.
3.69. 40. **3.70.** -3. **3.71.** 8. **3.72.** 3. **3.73.** -1. **3.74.** -4,98. **3.75.** 4,99.
3.76. -5,01. **3.77.** -3,02. **3.78.** 32,08. **3.79.** 0,96. **3.80.** 1,03. **3.81.** 1,2.
3.82. 1,075. **3.83.** 2,995. **3.84.** 0,805. **3.85.** 2,94 руб.
4.1. $f(x) = -1 - (x-1) - (x-1)^2 - (x-1)^3 - (x-1)^4 + o((x-1)^4)$.
4.2. $f(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$.
4.3. $f(x) = 1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$. **4.4.** $f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$.
4.5. $P''(10) = 2$. **4.6.** $P'''(11) = 12$. **4.7.** 0. **4.8.** $1/3$. **4.9.** $3/2$. **4.10.** $3/2$.
4.11. $1/3$. **4.12.** 0. **4.13.** 0. **4.14.** 0. **4.15.** 0. **4.16.** 2. **4.17.** $-1/12$.
4.18. $1/3$. **4.19.** $1/3$. **4.20.** $f(x) \approx 4x^3, 0,5$. **4.21.** $f(x) \approx -3x^2, -0,27$.
4.22. $f(x) \approx 2x^4, 1/8$. **4.23.** $f(x) \approx -\frac{1}{2}x^4, -1/32$.
4.24. $f(x) \approx -\frac{1}{4}x^4, -1/64$. **4.25.** $f(x) \approx -x^2, -0,04$.
4.26. $f(x) \approx 2x^2, 0,32$. **4.27.** $f(x) \approx 2x^6, 1/32$.
4.28. $f(x) = x - x^3 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$, $f^{(IV)}(0) = -12$.
4.29. $f(x) = \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$, $f^{(IV)}(0) = 16$.
4.30. $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)$, $f^{(IV)}(0) = 6$. **4.31.** -6. **4.32.** -8.
4.33. $12f''(x_0)\Delta x^2$. **4.34.** $15f''(x_0)\Delta x^2$. **4.35.** $12f''(x_0)\Delta x^2$.

4.36. $42f''(x_0)\Delta x^2$. 4.37. $y = -\frac{x}{2} + \frac{1}{3}$. 4.38. $y = e^2x + \frac{e^2}{2}$.

4.39. $y = x - 4.5$.

5.1. 16. 5.2. 688. 5.3. 58. 5.4. $y_{\min} = -3, y_{\max} = 5$.

5.5. $y_{\min} = -8, y_{\max} = 7$. 5.6. $y_{\min} = -15, y_{\max} = 9$. 5.7. $x=2$ ($x=4$

максимум). 5.8. $x=-5$ ($x=3$ минимум). 5.9. $f(2) \in (-1; 5)$.

5.10. $f(-1) \in (-4; 2)$. 5.11. 12 ($5+7, y=2x+3, x=2, x=2$).

5.12. 18 ($15+3, y=-2x+7, x=-4, x=2$). 5.13. $y = 0$ - горизонтальная

асимптота, $y' = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}, y'' = \frac{-2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}$, $\min : x = -1, \max : x = 1$,

точки перегиба: $x = \pm\sqrt{3}, x = 0$, 5.14. $y = 0$ - горизонтальная

асимптота, $x = 0$ - вертикальная асимптота, $y' = 30\frac{x-1}{x^7}$,

$y'' = 30\frac{7-6x}{x^8}$, $\min : x = 1$, точка перегиба: $x = \frac{7}{6}$.

5.15. $y = 2x - \frac{1}{2}$ - наклонная асимптота, $y' = \frac{4x^2+8x+3}{2(x+1)^2}$,

$y'' = \frac{1}{(x+1)^3}$, $\min : x = -\frac{1}{2}, \max : x = -\frac{3}{2}$. 5.16. $y = x$ - наклонная

асимптота, $x = 0$ - вертикальная асимптота, $y' = \frac{x^3-8}{x^3}, y'' = \frac{24}{x^4}$,

$\min : x = 2$. 5.17. $y = x$ - наклонная асимптота, $x = \pm 2$ - вертикальные

асимптоты, $y' = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}, y'' = \frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$, $\min : x = 2\sqrt{3}$,

$\max : x = -2\sqrt{3}, x = 0$ - точка перегиба. 5.18. $y = x$ - наклонная

асимптота, $y' = \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}, y'' = \frac{2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}$, $x = 0; \pm\sqrt{3}$ - точки

перегиба. 5.19. $y = x + 4$ - наклонная асимптота, $x = 2$ - вертикальная

асимптота, $y' = \frac{x^2(x-6)}{(x-2)^3}, y'' = \frac{24x}{(x-2)^4}$, $\min : x = 6, x = 0$ - точка

перегиба. 5.20. $y = -\frac{1}{3}x$ - наклонная асимптота, $x = 0$ - вертикальная

асимптота, $y' = \frac{-x^3-27}{3x^3}, y'' = \frac{27}{x^4}$, $\min : x = -3$.

5.21. $y = 1$ - горизонтальная асимптота, $x = -4$ - вертикальная асимптота, $y' = \frac{8x}{(x+4)^3}$, $y'' = \frac{16(2-x)}{(x+4)^4}$, $\min : x = 0$, $x = 2$ - точка перегиба.

5.22. $y = 2x + 11$ - наклонная асимптота, $x = 4$ - вертикальная асимптота, $y' = \frac{2x^2 - 16x - 7}{(x-4)^2}$, $y'' = \frac{78}{(x-4)^3}$, $\min : x = \frac{8 + \sqrt{78}}{2}$, $\max : x = \frac{8 - \sqrt{78}}{2}$.

5.23. $y = x + 6$ - наклонная асимптота, $x = 9$ - вертикальная асимптота, $y' = \frac{x^2 - 18x + 45}{(x-9)^2}$, $y'' = \frac{72}{(x-9)^3}$, $\min : x = 15$, $\max : x = 3$.

5.24. $y = x - 3$ - наклонная асимптота, $x = -1$ - вертикальная асимптота, $y' = \frac{x^3(x+4)}{(x+1)^4}$, $y'' = \frac{12x^2}{(x+1)^5}$, $\min : x = 0$, $\max : x = -4$.

5.25. $y = x - 3$ - наклонная асимптота, $x = -1$ - вертикальная асимптота, $y' = \frac{x(x^2 + 3x - 2)}{(x+1)^3}$, $y'' = \frac{10x - 2}{(x+1)^4}$, $\min : x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$, $\max : x = 0$, $x = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}$, точка перегиба: $x = \frac{1}{5}$.

5.26. $y = x + 5$ - наклонная асимптота, $x = 1$ - вертикальная асимптота, $y' = \frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}$, $y'' = \frac{24(x+1)}{(x-1)^4}$, $\min : x = 5$, $x = -1$ - точка перегиба.

5.27. $x = \pm 1$ - вертикальные асимптоты, $y' = \frac{x^2 - 3}{\sqrt[3]{(x^2 - 1)^4}}$, $y'' = \frac{2x(9 - x^2)}{3\sqrt[3]{(x^2 - 1)^7}}$, $\min : x = \sqrt{3}$, $\max : x = -\sqrt{3}$, точки перегиба: $x = 0; \pm 3$.

5.28. $y = 0$ - горизонтальная асимптота, $y' = 2(1-x)e^{2x-x^2}$, $y'' = 2(2x^2 - 4x + 1)e^{2x-x^2}$, $\max : x = 1$, точки перегиба: $x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$.

5.29. $y = 0$ - горизонтальная асимптота при $x \rightarrow +\infty$, $y' = (1-x)e^{-x}$, $y'' = (x-2)e^{-x}$, $\max : x = 1$, точка перегиба: $x = 2$.

5.30. $y = 0$ - горизонтальная асимптота при $x \rightarrow -\infty$,

$x = -1$ - вертикальная асимптота, $y' = \frac{x e^x}{(x+1)^2}$, $y'' = \frac{(x^2+1)e^x}{(x+1)^3}$,

$\min : x = 0$. **5.31.** $y = x + 2$ - наклонная асимптота,

$x = 0$ - вертикальная асимптота при $x \rightarrow 0+0$, $y' = \left(\frac{x^2 - x - 1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}$,

$y'' = \left(\frac{3x+1}{x^4}\right)e^{\frac{1}{x}}$, $\min : x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\max : x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, точка перегиба:

$x = -\frac{1}{3}$. **5.32.** $y = x + 7$ - наклонная асимптота, $x = 0$ - вертикальная

асимптота при $x \rightarrow 0+0$, $y' = \left(\frac{x^2 - 9x + 18}{x^2}\right)e^{\frac{9}{x}}$, $y'' = \left(\frac{45x - 144}{x^4}\right)e^{\frac{9}{x}}$

$\min : x = 6$, $\max : x = 3$, точка перегиба: $x = 3, 2$.

5.33. $x = 0$ - вертикальная асимптота при $x \rightarrow 0+0$, $y' = (2x-1)e^{\frac{1}{x}}$,

$y'' = \left(\frac{2x^2 - 2x + 1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}$, $\min : x = \frac{1}{2}$. **5.34.** $y = 0$ - горизонтальная

асимптота, $y' = (1 - 2x^2)e^{-x^2}$, $y'' = (4x^3 - 6x^2)e^{-x^2}$, $\min : x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$\max : x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, точки перегиба: $x = 0; \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.

5.35. $y = 0$ - горизонтальная асимптота, $y' = 2(x - x^3)e^{-x^2}$,

$y'' = 2(2x^4 - 5x^2 + 1)e^{-x^2}$, $\min : x = 0$, $\max : x = \pm 1$, точки перегиба:

$x = \pm\sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}}$. **5.36.** $y' = \ln x + 1$, $y'' = \frac{1}{x}$, $\min : x = \frac{1}{e}$.

5.37. $y' = x(2 \ln x + 1)$, $y'' = 2 \ln x + 3$, $\min : x = e^{\frac{1}{2}}$, точка перегиба:

$x = e^{\frac{3}{2}}$. **5.38.** $y = 0$ - горизонтальная асимптота при $x \rightarrow +\infty$,

$x = 0$ - вертикальная асимптота при $x \rightarrow 0+0$, $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, $\max : x = e$,

точка перегиба: $x = e^{\frac{3}{2}}$. **5.39.** $y' = \frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}$, $y'' = \frac{10x+2}{9\sqrt[3]{x^4}}$, $\min : x = \frac{2}{5}$,

$\max : x = 0$, точка перегиба: $x = -\frac{1}{5}$. **5.40.** $y = x + \frac{\pi}{4}$ - наклонная

асимптота при $x \rightarrow +\infty$, $y = x - \frac{\pi}{4}$ - наклонная асимптота при

$x \rightarrow -\infty$, $y' = \frac{x^2+2}{x^2+1}$, $y'' = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$, точка перегиба: $x = 0$.

5.41. $y = x - \frac{\pi}{4}$ - наклонная асимптота при $x \rightarrow +\infty$, $y = x + \frac{\pi}{4}$ -

наклонная асимптота при $x \rightarrow -\infty$, $y' = \frac{4x^2 - 1}{4x^2 + 1}$, $y'' = \frac{16x}{(4x^2 + 1)^2}$,

$\min : x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\max : x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, точка перегиба: $x = 0$.

6.1. $-\frac{1}{5}\cos x^5 + C$. **6.2.** $-\frac{1}{4}\ln|1 - x^4| + C$.

6.3. $\frac{1}{5}x^5 + \frac{5}{2}x\sqrt{x} - \frac{1}{x} + C$. **6.4.** $2\arctg(x) - 3\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + C$.

6.5. $x^5 - \frac{1}{3x^3} + C$. **6.6.** $x^3 + \arctg(x) + C$. **6.7.** $-\frac{3}{28}(3 - 7x)^{4/3} + C$.

6.8. $\frac{4}{9}(1 - 3x)^{3/2} - \frac{2}{3}(1 - 3x)^{1/2} + C$. **6.9.** $x + \ln|1 + 2x| + C$.

6.10. $-\frac{3}{2}x + \frac{11}{4}\ln|3 + 2x| + C$. **6.11.** $\arctg^3 x + C$. **6.12.** $\operatorname{tg}^3 x + C$.

6.13. $2\sqrt{\ln x} + C$. **6.14.** $\frac{2}{3}(1 + \ln x)^{3/2} + C$. **6.15.** $\frac{1}{4}(1 + x^3)^{4/3} + C$.

6.16. $\frac{5}{18}(x^3 - 8)^{6/5} + C$. **6.17.** $\frac{1}{2\cos^2 x} + C$. **6.18.** $e^{\operatorname{tg} x} + C$.

6.19. $-\frac{2}{15}(3 + \cos(5x))^{3/2} + C$. **6.20.** $-\frac{1}{9(x^3 + 3x + 1)^3} + C$.

6.21. $x - 2\sqrt{x} + \ln(\sqrt{x} + 1)^2 + C$. **6.22.** $\ln(2x\sqrt{x} + x) + C$.

6.23. $\sqrt{x^2 + 1} + C$. **6.24.** $\frac{1}{2}\arcsin(x^2) + C$. **6.25.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\left(x\sqrt{\frac{5}{7}}\right) + C$.

6.26. $\frac{1}{4}\ln(2x^2 + 3) + C$. **6.27.** $\arcsin^2 x - \sqrt{1 - x^2} + C$.

6.28. $-\frac{1}{2}e^{-(x^2 + 1)} + C$. **6.29.** $-\cos(\ln x) + C$. **6.30.** $\arctg(x + 2) + C$.

6.31. $\arcsin\left(\frac{x + 1}{2}\right) + C$. **6.32.** $\ln\left(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 8}\right) + C$.

6.33. $-\frac{1}{3}x \cos(3x) + \frac{1}{9} \sin(3x) + C$. **6.34.** $2x \sin x - x^2 \cos x + 2 \cos x + C$.
6.35. $(x+1)^2 \sin x + 2(x+1) \cos x + C$. **6.36.** $-(x+2)e^{-x} + C$.
6.37. $\frac{x+1}{3} \sin 3x + \frac{1}{9} \cos 3x + C$. **6.38.** $(3x+1,5) \sin(2x) + 1,5 \cos(2x) + C$.
6.39. $(x+0,5)e^{2x} + C$. **6.40.** $-(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + C$.
6.41. $x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$.
6.42. $(x^4 + 3x^2 - 7x) \ln x - \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 7x + C$.
6.43. $\left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{9}\right) \ln(3x+2) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{3} + C$. **6.44.** $x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C$.
6.45. $\frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C$. **6.46.** $-\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C$.
6.47. $-\frac{1}{3}t^3 + C = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}$. **6.48.** $-\frac{1}{4}t^2 + C = -\frac{1}{4}\left(\frac{2}{x^3} - 1\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{5}{4}$.
6.49. $-t + C = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + \sqrt{2}$. **6.50.** $\frac{1}{4}t^{-\frac{1}{3}} + C = -\frac{1}{4} \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} + \frac{1}{4\sqrt{5}}$.
6.51. -1 . **6.52.** 100 . **6.53.** $\frac{1}{5}(F(x;2) - F(x;-3)) + C$.
6.54. $\frac{1}{5}(2F(x;2) + 3F(x;-3)) + C$. **6.55.** $\frac{1}{2}F(15) - \frac{1}{2}F(7)$.
6.56. $\frac{1}{3}F(10) - \frac{1}{3}F(4)$. **6.57.** $\frac{1}{4}F(14) - \frac{1}{4}F(6)$. **6.58.** $\frac{1}{3}F(11) - \frac{1}{3}F(2)$.
6.59. 20 . **6.60.** $21/8$. **6.61.** $\frac{2}{3}(\sqrt{8} - 1)$.
6.62. $\pi/6$. **6.63.** $\frac{1}{2} \ln \frac{5}{2}$. **6.64.** $4 - 2\sqrt{2}$. **6.65.** 2 . **6.66.** 6 . **6.67.** 1 .
6.68. 9 . **6.69.** $\frac{1}{2} \int_1^2 t^5 dt = \frac{63}{12}$. **6.70.** $\frac{1}{2} \int_9^{16} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int_3^4 dz = 1$. **6.71.** $\int_1^3 \frac{dt}{1+t} = \ln 2$.

6.72. $\frac{1}{7} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{28}$. 6.73. $600=6! \cdot 5!$. 6.74. 3. 6.75. 13. 6.76. -2.

6.77. 1. 6.78. Расходится. 6.79. Расходится. 6.80. $\frac{1}{p-1}$ при $p > 1$,

Расходится при $p \leq 1$. 6.81. $\frac{1}{2}$. 6.82. π . 6.83. $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$. 6.84. 2. 6.85.

Расходится. 6.86. Расходится. 6.87. Расходится. 6.88. $\frac{1}{1-p}$ при

$p < 1$, расходится при $p \geq 1$. 6.89. Расходится. 6.90. $\frac{\pi}{2}$.

6.91. Сходится. 6.92. Сходится. 6.93. Сходится. 6.94. Расходится.

6.95. Сходится. 6.96. Сходится. 6.97. Сходится. 6.98. Сходится.

7.1. а) $y = \frac{C}{x}$. 7.1. б) $y = Ce^{\frac{1}{x}}$. 7.1. в) $y = C(x+1)e^{-x}$.

7.1. г) $y = C(2x+1)$. 7.1. д) $x^2 + y^2 = C$. 7.1. е) $x^2 + y^2 = \ln(Cx^2)$.

7.1. ж) $y = 2 + C \cos x$. 7.1. з) $x = 0, \ln|x| = C + \sqrt{y^2 + 1}$. 7.1. и) $y = 1,$

$\frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| = -\frac{1}{x} + C$. 7.2. а) $y = 4e^{x+2}$. 7.2. б) $y = 3x^2$.

7.2. в) $y = 2(x+1)$. 7.2. г) $y = e^{\frac{\pi}{4} - \text{arctg}(x)}$. 7.3. $2(y+1)e^{-y} = x^2 + 1$.

7.4. $y = 0$. 7.5. $y = e^{-x}$. 7.6. $y = e^{\sqrt{x}-2}$. 7.7. $y = -x$.

7.8. а) $x + y = Cx^2$. 7.8. б) $\ln(x^2 + y^2) = C - \text{arctg} \frac{y}{x}$.

7.8. в) $x(y-x) = Cy, y = 0$. 7.8. г) $y = Ce^{\frac{y}{x}}$. 7.8. д) $y^2 - x^2 = Cy,$

$y = 0$. 7.9. а) $y = Cx^3 - x^2$. 7.9. б) $y = \frac{C - e^{-x^2}}{2x^2}$. 7.9. в) $y = \ln x + \frac{C}{x}$.

7.9. г) $y = Cx^2 + x^4$. 7.9. д) $xy = C - \ln|x|$. 7.9. е) $y = e^x(\ln|x| + C)$.

7.9. ж) $y = C \ln^2 x - \ln x$. 7.10. а) $y = \frac{1}{x \ln Cx}$. 7.10. б) $y(e^x + Ce^{2x}) = 1,$

$y = 0$. 7.10. в) $y^2 = \frac{e^{x^2}}{2x+C}$. 7.10. г) $y = \frac{x}{C - \ln x}$.

$$7.10. \text{д)} y^2 = \frac{1}{1 + Ce^{x^2}}. \quad 7.11. \text{а)} y = 2x^2 + \frac{1}{x}. \quad 7.11. \text{б)} y = \frac{2x}{1 - 3x^2}.$$

$$7.11. \text{в)} y^3 = x - 2e^{1-x}. \quad 7.12. x = c_1 e^t + c_2 e^{5t}, y = -c_1 e^t + 3c_2 e^{5t}.$$

$$7.13. x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t}, y = 2c_1 e^t - 2c_2 e^{3t}. \quad 7.14. x = 2c_1 e^{3t} - 4c_2 e^{-3t},$$

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{5t}.$$

$$7.15. x = e^{2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t),$$

$$y = e^{2t}((c_1 + c_2) \cos t + (c_2 - c_1) \sin t).$$

$$7.16. x = e^t(c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t),$$

$$y = e^t(c_1 \sin 3t - c_2 \cos 3t).$$

$$7.17. x = (2c_2 - c_1) \cos 2t - (2c_1 + c_2) \sin 2t,$$

$$y = (c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t).$$

$$7.18. x = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-t}, y = c_1 e^t - 3c_3 e^{-t},$$

$$z = c_1 e^t + c_2 e^{2t} - 5c_3 e^{-t}.$$

$$7.19. x = c_1 + 3c_2 e^{2t}, y = -2c_2 e^{2t} + c_3 e^{-t},$$

$$z = c_1 + c_2 e^{2t} - 2c_3 e^{-t}.$$

$$7.20. x = c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t}, y = c_1 e^t + c_2 e^{2t},$$

$$z = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t}.$$

$$7.21. x = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{5t}, y = c_1 e^t - 2c_2 e^{2t} + c_3 e^{5t},$$

$$z = -c_1 e^t - 3c_2 e^{2t} + 3c_3 e^{5t}.$$

$$7.22. y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}. \quad 7.23. y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}. \quad 7.24. y = c_1 + c_2 e^{2x}.$$

$$7.25. y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{\frac{x}{2}}. \quad 7.26. y = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x).$$

$$7.27. y = e^{-x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x). \quad 7.28. y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x.$$

$$7.29. y = c_1 e^{2x} + e^{-x}(c_2 \cos x \sqrt{3} + c_3 \sin x \sqrt{3}).$$

$$7.30. y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x.$$

$$7.31. y = 4e^x + ce^{4x}. \quad 7.32. y = e^{-x}. \quad 7.33. y = \sin 2x. \quad 7.34. y = 1.$$

Учебное издание

Логвенков Сергей Алексеевич,

Мышкис Петр Анатольевич,

Самовол Владимир Симхович

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ.

ФУНКЦИЯ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.

Учебное пособие для факультетов менеджмента, политологии и социологии.

Учебное пособие

Редактор

Корректор

Оригинал-макет

Оформление

Лицензия

Подписано в печать . Формат

Усл. печ. л . Тираж 500 экз.